

Dinámicas de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower modificado con respuesta funcional Holling tipo III y efecto Allee afectando a las presas

Sebastián Valenzuela-Figueroa¹, Eduardo González-Olivares^{2,3} y Alejandro Rojas-Palma⁴

¹ Centro de Docencia Superior en Ciencias Básicas, Universidad Austral de Chile, Puerto Montt, Chile

² Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

³ Instituto de Filosofía y Ciencias de la Complejidad, Santiago, Chile,

⁴ Departamento de Matemática, Física y Estadística, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile



sebastian.valenzuela@uach.cl, ejgonzal@ucv.cl, amrojas@ucm.cl

1. Introducción

La principal característica de los modelos depredador-presa del tipo Leslie o modelo logístico [8] o modelos del tipo Leslie-Gower [1], es que la capacidad de carga del medio ambiente del depredador Ky es una función del tamaño de presa $x = x(t)$, es decir, depende de los recursos alimenticios disponibles.

En el modelo original propuesto por Philip H. Leslie en 1948 [5], se asume que la capacidad de carga ambiental de los depredadores es proporcional a la abundancia de presas, es decir, $Ky = K(x) = nx$.

En este trabajo analizamos un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower [5, 8], considerando tres aspectos importantes:

- La acción de los depredadores o respuesta funcional es una función sigmoidea racional [7],
- los depredadores cuentan con un alimento alternativo [1] y,
- las presas están afectadas por un efecto Allee [3].

El efecto Allee es un fenómeno ecológico que afecta a algunas especies [3, 6], y que queda en evidencia a bajos tamaños (densidades) de población.

Es originado por diversas causas [2] y su estudio se ha incrementado en las últimas décadas, debido a la alta probabilidad que las poblaciones afectadas puedan extinguirse [2].

Es descrito mediante distintas expresiones algebraicas [3], muchas de las cuales son topológicamente equivalentes. En este trabajo se usará la más común en la literatura ecológica [8], representada por la ecuación siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) \cdot (x - m) \cdot x$$

De la definición del efecto, se cumple: $-K < m \ll K$. Cuando $m > 0$, se tiene un efecto Allee fuerte; existe un efecto Allee débil si $m < 0$ y un efecto Allee débil especial cuando $m = 0$ [3].

2. El Modelo

Consideraremos el modelo depredador-presa modificado del tipo Leslie-Gower descrito por el sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo del tipo Kolmogorov [4].

$$X_{\mu}(x, y) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) x - \frac{q x^2}{x^2 + a^2} y \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nK}\right) y \end{cases} \quad (1)$$

donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son los tamaños poblacionales de las presas y los depredadores respectivamente, con $\mu = (r, K, q, a, s, n, m, c) \in \mathbb{R}_+^6 \times]-K, K[\times]0, \infty[$ y los parámetros tienen diferentes significados ecológicos. El sistema está definido en

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$$

Por razones ecológicas se debe cumplir: $a < K$.

3. Resultados principales

A partir del estudio realizado, se obtienen los siguientes resultados principales.

- El sistema (1) o campo vectorial $X_{\mu}(x, y)$ es topológicamente equivalente al sistema

$$Y_{\eta}(u, v) : \begin{cases} \frac{du}{dt} = u(u+C) \left((1-u)(u-M) (u^2 + A^2) - Quv \right) \\ \frac{dv}{dt} = Bv(u+C-v)(u^2 + A^2) \end{cases} \quad (2)$$

con $\eta = (A, B, C, Q, M) \in]0, 1[\times (\mathbb{R}_0^+)^3 \times]-1, 1[$, donde $A = \frac{a}{K}$, $B = \frac{s}{Kr}$, $C = \frac{c}{nK}$, $Q = \frac{q}{r}$ and $M = \frac{m}{K}$. Además, los puntos de equilibrio positivos son de la forma $P(u, u+C)$ satisfaciendo la ecuación:

$$u^4 - (1+M)u^3 + (A^2+M+Q)u^2 - (A^2(M+1)-CQ)u + MA^2 = 0$$

- El conjunto $\Gamma = \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2, 0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ es una región de invarianza para Y_{π} .
- Las soluciones son acotadas.
- Para todo valor de los parámetros, el origen es un repulsor no-hiperbólico, el equilibrio $(1, 0)$ es un punto silla hiperbólico y el punto $(0, C)$ es un atractor no-hiperbólico.
- Debido a la dificultad para obtener las coordenadas de los puntos de equilibrio positivos, se estudiará un caso particular, en el cual la población de presas está afectada por el efecto Allee débil especial, $M = 0$, y además, asumimos la condición $A^2 = CQ$. El sistema (2) se reduce a:

$$Y_{\pi}(u, v) : \begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2 \cdot (u+C) \left((1-u)(u^2 - (A^2/C)v) \right) \\ \frac{dv}{dt} = Bv(u+C-v)(u^2 + A^2) \end{cases} \quad (3)$$

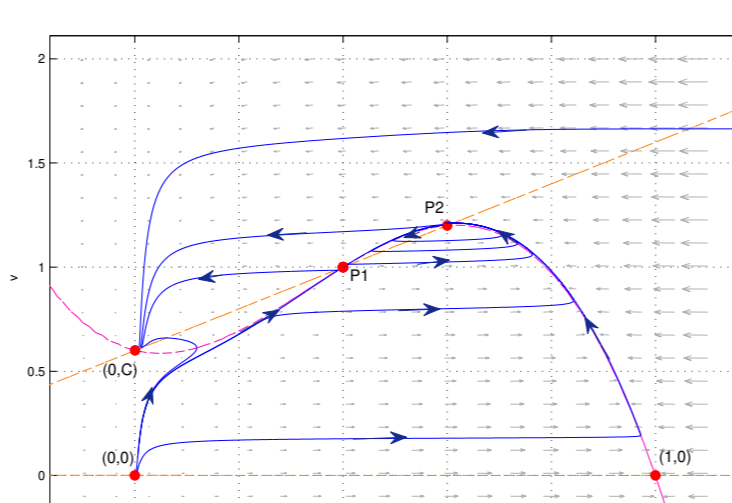
con $\pi = (A, B, C) \in]0, 1[\times (\mathbb{R}_0^+)^2$.

- Si $1 - 4Q(C+1) > 0$, existen dos puntos de equilibrio al interior del primer cuadrante de la forma $(u_e, u_e + C)$ que satisfacen la ecuación $u^2 - u + A^2 \cdot (1 + (1/C)) = 0$, cumpliendo:

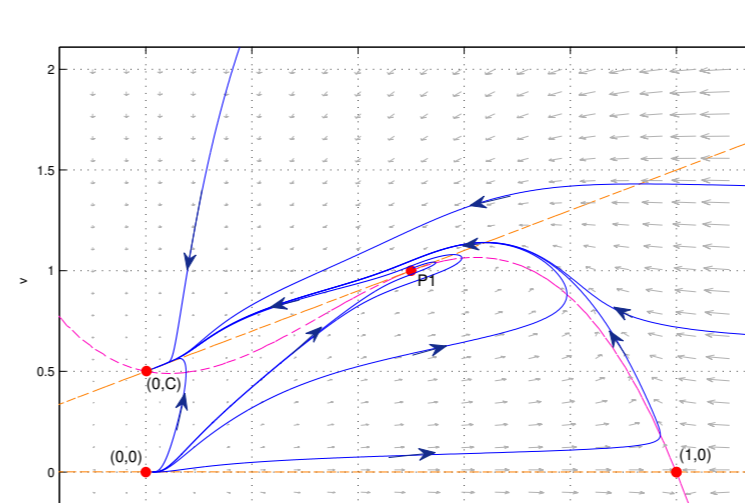
- $P_1(u_{e1}, u_{e1} + C)$ es un punto silla hiperbólico. Además, las variedades estable por arriba e inestable por derecha del punto $P_1(u_{e1}, u_{e1} + C)$, anotadas $W_+^s(u_{e1}, u_{e1} + C)$ y $W_+^u(u_{e1}, u_{e1} + C)$, forman una curva homoclínica para un subconjunto (del espacio) de parámetros.
- $P_2(u_{e2}, u_{e2} + C)$ puede ser un atractor, foco débil o repulsor, dependiendo del signo de $T = u^2 \cdot (-A^2 - 3u + 2u) - B \cdot (A^2 + B^2)$. En el último caso, existe un ciclo límite estable.

En la figura (a), para $A = 0,3$, $B = 0,01$, $C = 0,6$ y $Q = 0,15$, P_1 es un punto silla y P_2 es un foco inestable rodeado de un ciclo límite generado vía bifurcación de Hopf.

- Si $1 - 4Q(C+1) = 0$, hay un único punto de equilibrio al interior del primer cuadrante de la forma $(u_e, u_e + C)$ satisfaciendo la ecuación $u^2 - u + A^2 \cdot (1 + (1/C)) = 0$ y existen condiciones en el espacio de parámetros para el cual se obtiene una bifurcación de Bogdanov-Takens, es decir, el equilibrio $P_1(u_e, u_e + C)$ es punto cúspide. En la figura (b), para $A = \sqrt{1/12}$, $B = 0,125$, $C = 0,5$ y $Q = \frac{1}{6}$ la única singularidad (multiplicidad dos) es un punto cúspide.



(a) Dos singularidades.



(b) Una única singularidad.

4. Conclusiones

El modelo con efecto Allee débil especial $M = 0$, y con la condición $A^2 = CQ$, posee variadas e interesantes dinámicas, teniendo diferentes tipos de bifurcaciones, entre ellas:

- Existen hasta dos puntos de equilibrio positivos hiperbólicos $(u_{e1}, u_{e1} + C)$ y $(u_{e2}, u_{e2} + C)$.
- La singularidad $(u_{e1}, u_{e1} + C)$ es siempre un punto silla.
- Las variedades estable e inestable de $(u_{e1}, u_{e1} + C)$ generan una curva homoclínica que encierra a $(u_{e2}, u_{e2} + C)$.
- Al variar los parámetros la curva homoclínica se rompe generando un ciclo límite no-infinitesimal (existe una bifurcación homoclínica).
- Los puntos $(u_{e1}, u_{e1} + C)$ y $(u_{e2}, u_{e2} + C)$ pueden coincidir obteniendo un punto de equilibrio no-hiperbólico silla-nodo $(u_{e*}, u_{e*} + C)$.
- Cuando $\text{tr}DY_{\pi}(u_{e*}, u_{e*} + C) = 0$, se genera un punto cúspide (Bifurcación de Bogdanov-Takens).
- El punto $(u_{e2}, u_{e2} + C)$ puede ser atractor o repulsor hiperbólico.
- Si $\text{tr}DY_{\pi}(u_{e2}, u_{e2} + C) = 0$, se tiene una bifurcación de Hopf, generándose un ciclo límite infinitesimal.
- El punto $(0, C)$ es un punto atractor no hiperbólico, por lo cual existe una curva separatriz Σ dividiendo el comportamiento de las trayectorias en el plano de fase.
- Cuando $(u_{e2}, u_{e2} + C)$ es atractor o repulsor rodeado de un ciclo límite estable se tiene el fenómeno de bi-estabilidad.

Todo lo anterior indica que el modelo es altamente sensible a las condiciones iniciales, siendo difícil predecir si las poblaciones coexisten o una de ellas se extingue, para un mismo subconjunto de parámetros. Sin embargo, la naturaleza del punto $(0, C)$ implica que la extinción de la población de presas es posible y los depredadores crecen hasta su máxima capacidad de carga C .

Referencias

- [1] C. Arancibia-Ibarra and E. González-Olivares, A modified Leslie-Gower predator-prey model with hyperbolic functional response and Allee effect on prey, In R. Mondaini (Ed.) BIOMAT2010 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Co. Pte. Ltd., Singapore (2011) 146-162.
- [2] L. Berec, E. Angulo, F. Courchamp, Multiple Allee effects and population management. Trends Ecol. Evol., 22 (2007) 185-191.
- [3] F. Courchamp, L. Berec, J. Gascoigne, Allee effects in ecology and conservation, Oxford University Press (2008).
- [4] H. I. Freedman, Deterministic Mathematical Model in Population Ecology, Marcel Dekker (1980).
- [5] P. H. Leslie, Some further notes on the use of matrices in population mathematics, Biometrika 35 (1948) 213-245.
- [6] P. A. Stephens, W. J. Sutherland, R. P. Freckleton, What is the Allee effect?, Oikos 87 (1999) 185-190.
- [7] J. Sugie, K. Miyamoto, K. Morino, Absence of limit cycle of a predator-prey system with a sigmoid functional response, Appl. Math. Lett. 9 (1996) 85-90.
- [8] P. Turchin, Complex population dynamics. A theoretical/empirical synthesis, Monographs in Population Biology 35, Princeton University Press (2003).