

Problema de interacción fluido-sólido proveniente de la neurocirugía

J. Vásquez-Coronel, D. Mora-Herrera, L. Cuesta-Herrera



Doctorado en Modelamiento Matemático
Universidad Católica del Maule
Av. San Miguel 3605, Talca, Chile.



jvasquez.12.c@gmail.com, dmorah@gmail.com, ledyz.cuesta@alu.ucm.cl

1. Introducción

La necesidad de estudiar problemas de interacciones fluido-sólido surge en muchas situaciones importantes de ingeniería y biomédicas. Este trabajo aborda un problema específico desde la neurocirugía guiada por imágenes médicas actuales (resonancia magnética, tomografía computarizada, etc.) que facilita al cirujano la localización de estructuras neuroanatómicas de interés antes de la operación. Sin embargo, la correspondencia entre los datos adquiridos y la anatomía actual del paciente no suele ser muy precisa, de hecho, sufre cambios significativos en la posición y forma del tejido cerebral, conocido como desplazamiento cerebral, esto ocurre durante la neurocirugía. Para predecir la deformación cerebral y así corregir las imágenes médicas adquiridas, se introdujo un modelo biomecánico cerebral de interacción fluido-sólido basado en elasticidad lineal para el tejido cerebral acoplado con el problema de Stokes para el fluido. El análisis se realiza a través de una formulación variacional mixta mediante el método de elementos finitos.

2. Problema modelo

Denotemos por $\Omega_F \subset \mathbb{R}^n$ y $\Omega_S \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) los dominios poliédricos interior y exterior, ocupado por el fluido y el sólido respectivamente, como se muestra en la Figura ?? en el caso 2D. La frontera exterior de Ω_S es la unión de Γ_N y Γ_D , la estructura está fija sobre Γ_D y afectada por la fuerza de superficie g sobre Γ_N . Denotamos por ν el vector normal exterior a Ω_S , por Γ_I la interface entre el sólido y el fluido y por \mathbf{n} el vector normal exterior a Ω_F . En este trabajo estamos interesados en derivar y analizar una formulación mixta para el problema modelo descrito en [1] que consiste en encontrar el tensor de esfuerzo σ y el desplazamiento \mathbf{u} en la estructura, la presión p y el potencial escalar φ ($\nabla\varphi$ representa el desplazamiento del fluido) en el fluido, los cuales satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mathbf{f}_F \quad \text{in } \Omega_F, & \sigma &= \mathcal{C}\varepsilon(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega_S, \\ \frac{1}{\rho_F c^2} p + \Delta\varphi &= 0 \quad \text{in } \Omega_F, & -\operatorname{div}\sigma &= \mathbf{f}_S \quad \text{in } \Omega_S, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_I, & \sigma\nu &= \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_N, \\ \sigma\mathbf{n} &= -p\mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_I, & \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_D, \end{aligned}$$

donde ρ_F es la densidad del fluido, c es la velocidad del sonido del fluido y $\mathbf{f}_S \in \mathbf{L}^2(\Omega_S)$, $\mathbf{f}_F \in \mathbf{L}^2(\Omega_F)$ (\mathbf{f}_F es un gradiente) y $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_N)$ son términos fuente.

3. Formulación variacional mixta

Se introducen los siguientes espacios de Hilbert

$$\mathbb{H} := \{(\tau, q) \in \mathbb{H}_{\Gamma_N}(\operatorname{div}, \Omega_S) \times H^1(\Omega_F) : \tau\mathbf{n} + q\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_I\},$$

$$\mathbb{Q} := \mathbf{L}^2(\Omega_S) \times \tilde{H}^1(\Omega_F) \times [L^2(\Omega_S)]_{ASIM}^{n \times n},$$

denotados de las siguientes normas

$$\|(\tau, q)\|_{\mathbb{H}}^2 := \|\tau\|_{\mathbb{H}(\operatorname{div}, \Omega_S)}^2 + \|q\|_{1, \Omega_F}^2,$$

$$\|(\mathbf{v}, \psi, \boldsymbol{\eta})\|_{\mathbb{Q}}^2 := \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega_S}^2 + \|\psi\|_{1, \Omega_F}^2 + \|\boldsymbol{\eta}\|_{0, \Omega_S}^2,$$

Hallar $((\sigma, p), (\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\gamma})) \in \mathbb{H} \times \mathbb{Q}$ tal que

$$A((\sigma, p), (\tau, q)) + B((\tau, q), (\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\gamma})) = 0 \quad \forall (\tau, q) \in \mathbb{H}, \quad (1)$$

$$B((\sigma, p), (\mathbf{v}, \psi, \boldsymbol{\eta})) = F(\mathbf{v}, \psi, \boldsymbol{\eta}) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{Q},$$

donde A y B son formas bilineales, y F funcional lineal definidos a continuación:

$$A((\sigma, p), (\tau, q)) := \int_{\Omega_S} \mathcal{C}^{-1}\sigma : \tau + \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} p q,$$

$$B((\tau, q), (\mathbf{v}, \psi, \boldsymbol{\eta})) := \int_{\Omega_S} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}\tau + \int_{\Omega_S} \tau : \boldsymbol{\eta} - \int_{\Omega_F} \nabla q \cdot \nabla\psi$$

y

$$F(\mathbf{v}, \psi, \boldsymbol{\eta}) := - \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega_F} \mathbf{f}_F \cdot \nabla\psi,$$

para todo $(\sigma, p), (\tau, q) \in \mathbb{H}$ y $(\mathbf{v}, \psi, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{Q}$.

4. Discretización de elementos finitos

Sean $\{\mathcal{T}_h^S\}_{h>0}$ y $\{\mathcal{T}_h^F\}_{h>0}$ una familia de triangulaciones regulares de Ω_S y Ω_F respectivamente, compuestas por triángulos o tetraedros T ($n = 2, 3$), con diámetro de malla $h := \{h_T : T \in \{\mathcal{T}_h^S\}_{h>0} \cup \{\mathcal{T}_h^F\}_{h>0}\}$, asumiendo que los vértices de $\{\mathcal{T}_h^S\}_{h>0}$ y $\{\mathcal{T}_h^F\}_{h>0}$ coinciden sobre la interface Γ_I . Además, para algún $T \in \mathcal{T}_h$, se definen los subespacios discretos globales para \mathbb{H} y \mathbb{Q} ,

$$\mathbb{H}_h := \{(\tau_h, q_h) \in \mathbb{H}_{1,h} \times \mathbb{H}_{2,h} : \tau_h\mathbf{n} + q_h\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_I\},$$

$$\mathbb{Q}_h := \mathbb{Q}_{1,h} \times \mathbb{Q}_{3,h} \times \mathbb{Q}_{2,h},$$

donde $\mathbb{H}_{1,h} \times \mathbb{Q}_{1,h} \times \mathbb{Q}_{2,h}$ constituye el espacio de elementos finitos de Arnold, Falk y Winther (ver [3], [4]) para el problema de elasticidad lineal, $\mathbb{H}_{2,h} := \{q_h \in C(\Omega_F) : q_h|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^F\}$ y $\mathbb{Q}_{3,h} := \{\psi_h \in C(\Omega_F) : \psi_h|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^F\} \cap \tilde{H}^1(\Omega_F)$.

Hallar $((\sigma_h, p_h), (\mathbf{u}_h, \varphi_h, \boldsymbol{\gamma}_h)) \in \mathbb{H}_h \times \mathbb{Q}_h$ tal que

$$A((\sigma_h, p_h), (\tau_h, q_h)) + B((\tau_h, q_h), (\mathbf{u}_h, \varphi_h, \boldsymbol{\gamma}_h)) = 0 \quad (2)$$

$$B((\sigma_h, p_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h, \boldsymbol{\eta}_h)) = F(\mathbf{v}_h, \psi_h, \boldsymbol{\eta}_h),$$

para todo $((\tau_h, q_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h, \boldsymbol{\eta}_h)) \in \mathbb{H}_h \times \mathbb{Q}_h$.

Teorema 4.1 Existe una constante $c > 0$ y $s \in (0, 1]$, independientes de h y λ , tal que

$$\|(\sigma, p) - (\sigma_h, p_h)\|_{\mathbb{H}} + \|(\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{u}_h, \varphi_h, \boldsymbol{\gamma}_h)\|_{\mathbb{Q}} \leq ch^s (\|\sigma\|_{\mathbb{H}^s(\operatorname{div}, \Omega_S)} + \|p\|_{1+s, \Omega_F} + \|\mathbf{u}\|_{s, \Omega_S} + \|\varphi\|_{1+s, \Omega_F} + \|\boldsymbol{\gamma}\|_{s, \Omega_S})$$

donde $((\sigma, p), (\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\gamma})) \in \mathbb{H} \times \mathbb{Q}$ y $((\sigma_h, p_h), (\mathbf{u}_h, \varphi_h, \boldsymbol{\gamma}_h)) \in \mathbb{H}_h \times \mathbb{Q}_h$ son soluciones únicas de los problemas (1) y (2) respectivamente.

5. Resultados numéricos

Sea N el número de grados de libertad, los errores individuales se denotan por:

$$e(\sigma) := \|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbb{H}(\operatorname{div}, \Omega_S)}, \quad e(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega_S},$$

$$e(\boldsymbol{\gamma}) := \|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_{0, \Omega_S}, \quad e(p) := \|p - p_h\|_{1, \Omega_F}, \quad e(\varphi) := |\varphi - \varphi_h|_{1, \Omega_S},$$

donde $((\sigma, p), (\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\gamma})) \in \mathbb{H} \times \mathbb{Q}$ y $((\sigma_h, p_h), (\mathbf{u}_h, \varphi_h, \boldsymbol{\gamma}_h)) \in \mathbb{H}_h \times \mathbb{Q}_h$ son las soluciones de los problemas (1) y (2), respectivamente. Además, sean $r(\sigma)$, $r(\mathbf{u})$, $r(\boldsymbol{\gamma})$, $r(p)$, y $r(\varphi)$ las tasas de convergencia dadas por:

$$r(\dagger) := \frac{\log(e(\dagger)/e'(\dagger))}{\log(h/h')},$$

donde h y h' denotan dos mallas consecutivas y e y e' , los errores correspondientes.

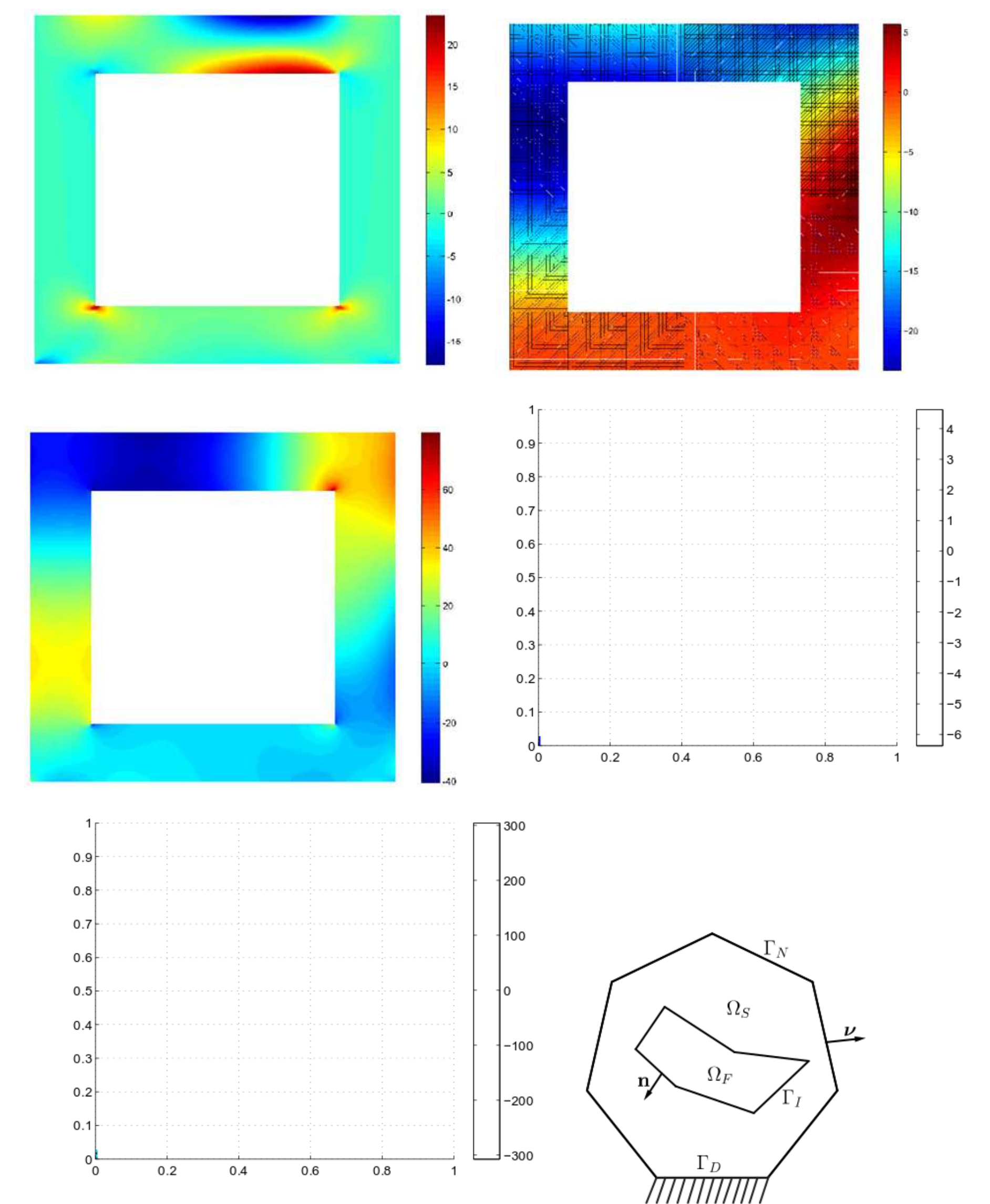
A modo de ejemplo, sean $\Omega_F := [0, 1]^2$ y $\Omega_S := [-0.5, 1.5]^2 \setminus \Omega_F$ los dominios para el fluido y sólido. Considérese el módulo de Young $E = 1$ y el radio de Poisson $\nu = 0.4999$, que proporciona las constantes de Lamé $\lambda := 16666.4444$ y $\mu := 0.3333$. Luego, tomando los parámetros $\rho_F = 1$, $c = 1$, $\mathbf{g} = (0, 0)$, $\mathbf{f}_S = (\sin(2\pi x) \cos(x) e^{x^2+y^2}, e^{4x} \sin(4y) + x^2 + y^2)^t$ y $\mathbf{f}_F = (\cos(\pi(x^2 + y^2)) + x^2 e^{\sin(x^2+y^2)}, x(x-1)y(y-1))$ se resuelve el problema modelo.

Grados de libertad, tamaños de malla e historial de convergencia para variables que modelan el sólido.

N	h	e(σ)	r(σ)	e(u)	r(u)	e(γ)	r(γ)
160	0.1768	53.9395	-	16.3260	-	35.3869	-
640	0.0884	31.4741	0.78	8.0924	1.01	20.2455	0.81
2560	0.0442	18.2682	0.78	4.0045	1.01	11.6820	0.79
10240	0.0221	9.7355	0.91	1.8085	1.15	6.3187	0.89

Grados de libertad, tamaños de malla y convergencia para variables que modelan el fluido.

N	h	e(p)	r(p)	e(φ)	r(φ)
160	0.1768	0.0028	-	36.4761	-
640	0.0884	0.0009	1.64	18.0910	1.01
2560	0.0442	0.0003	1.58	8.8225	1.04
10240	0.0221	0.0001	1.58	3.9492	1.16



6. Conclusiones

In this work we presented the mathematical and numerical analysis of a fluid-solid interaction problem. The analysis covered the whole range from the well posedness of the continuous problem, the Galerkin approximation and the estimation of the error. Further investigation about the extension of the present framework to more general situations such as nonlinear materials and/or flows, and time-dependent problems, posteriori estimation of the error, will be the subject of future research.

7. Agradecimientos

Este trabajo es realizado con el soporte ...

Referencias

- [1] R. ARAYA, G. BARRENECHEA, F. JAILLET AND R. RODRÍGUEZ, *Finite-element analysis of a static fluid-solid interaction problem*. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 31, pp. 886-913, (2011).
- [2] C. DOMÍNGUEZ, G. GATICA, S. MEDDAHI AND R. OYARZÚA, *A priori error analysis of a fully-mixed finite element method for a two-dimensional fluid-solid interaction problem*. ESAIM Math. Model. Numer. Anal., vol. 47, pp. 471-506, (2013).
- [3] G. GATICA, A. MÁRQUEZ AND S. MEDDAHI, *Analysis of the coupling of primal and dual-mixed finite element methods for a two-dimensional fluid-solid interaction problem*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 45, pp. 2072-2097, (2007).