

XI CONGRESO LATINOAMERICANO DE BIOLOGÍA MATEMÁTICA



SoLaBiMa 2019

Universidad Católica del Maule

22-25 de Octubre de 2019, Talca, Chile



Modelo fraccional conformable de Gompertz: Un estudio de la Tuberculosis en Mexico

Dr. Juan Carlos Hernández Gómez*

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco de Juárez, México

Resumen

En este trabajo usamos una derivada fraccional conformable G_T^α , con el kernel $T(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t}$, para estudiar el modelo de Gompertz. Como una aplicación, estimamos el orden de la derivada y la tasa de cambio asociadas con los modelos fraccionales de Gompertz, resolviendo un problema inverso que involucra datos simulados y reales sobre la Tuberculosis en México. En la misma dirección, mostramos la viabilidad de la derivada fraccional conformable ($T(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t}$) con respecto a los enfoques de , Khalil y Caputo.

1. Introducción

La tuberculosis es una de las enfermedades infecciosas más antiguas. Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), un tercio de la población mundial está infectada por el bacilo de la tuberculosis (*Mycobacterium tuberculosis* o "Bacillus Koch"), con el riesgo de desarrollar la enfermedad en algún momento de su vida.

En México, la tuberculosis se considera actualmente un desafío para la salud pública, ya que una persona enferma puede infectar de 15 a 20 personas por año. Según el Gobierno Federal en México (ver cite tuber1), más de la mitad de todos los municipios del país informan casos de tuberculosis cada año, prácticamente hay tuberculosis en todo México. Los estados en México con el mayor número de casos nuevos y muertes son: Baja California, Veracruz, Guerrero, Sonora, Tamaulipas, Chiapas, Nuevo León y Tabasco.

A lo largo de los siglos, las Matemáticas han desempeñado un papel crucial en el desarrollo de la civilización humana, porque entre otros alcances, ha permitido describir y predecir eventos en el mundo real, a través de representaciones matemáticas. En este punto, es válido enfatizar la importancia de las ecuaciones diferenciales para el estudio de muchas de las leyes de la naturaleza, ya sea a través de problemas de tipo *directo* o *inverso*.

El modelo de Gompertz ha sido muy estudiado y ampliamente utilizado en varias ramas de las ciencias biológicas. Este modelo fue sugerido y aplicado por primera vez por Benjamin Gompertz en 1825 (ver [9]) para estudiar la relación entre el aumento de la tasa de mortalidad y la edad. El modelo de Gompertz también se aplica con frecuencia al modelo de crecimiento

*Parcialmente financiado por Universidad Autónoma de Guerrero, e-mail: jcarloshg@gmail.com

microbiano (ver [20]), crecimiento de tumores (ver [21], [27]) y crecimiento de organismos (ver [4], [26], [31], [34]). El modelo de Gompertz ha sido utilizado con éxito por especialistas de diferentes campos además del de la mortalidad humana, y se ha convertido en uno de los modelos básicos para pronosticar el aumento de la demanda de bienes y servicios, las ventas de tabaco y el crecimiento del tráfico ferroviario ([25], [23]).

Hasta hace poco, la investigación sobre cálculo fraccionario se limitaba al campo de las matemáticas puras (básicas), pero, en las últimas dos décadas, aparecieron muchas aplicaciones de cálculo fraccionario en varios campos de ingeniería, ciencias aplicadas, economía física, etc. ([12], [18] y [32], por ejemplo). Como resultado, el cálculo fraccionario se ha convertido en un tema importante para los investigadores en diversos campos. Y, la parte más interesante es que esto no es el resultado del azar; por el contrario, hay una base matemática sólida para ello, como lo demuestran varios estudios generales (ver [2], [8], [11], [12], [13], [14], [17], [19] y [24]).

Es importante tener en cuenta que las derivadas fraccionales globales (por ejemplo, Caputo y Riemann-Liouville) no están recopilando mera información local. Por el contrario, los operadores fraccionales realizan un seguimiento de la historia del proceso que se estudia; Esta característica permite modelar las respuestas no locales y distribuidas que comúnmente aparecen en los fenómenos naturales y físicos. Por otro lado, uno debe reconocer que estas derivadas fraccionarias muestran algunos inconvenientes serios. Para superar algunas de estas y otras dificultades, Khalil et al. [18], se le ocurrió una idea interesante que extiende la definición familiar de límite de la derivada de manera que permita introducir con éxito una derivada fraccionaria conformable; más recientemente, se introduce la derivada fraccional no conformable en [10].

De esta manera, se abrió una nueva dirección en el cálculo fraccionario, que ha demostrado ser interesante desde un punto de vista teórico y útil en las aplicaciones. Se introdujo una definición general de derivada fraccionaria en [5], que generaliza la derivada conformable fraccionaria en [18] para el orden $0 < \alpha \leq 1$.

2. Resultados Preliminares

Retomando la definición de derivada fraccional generalizada en [5]. Dado $s \in \mathbb{R}$, denotamos por $[s]$ la *parte entera superior* de s , es decir, el entero más pequeño mayor o igual a s .

Definición 1 Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y una función continua y positiva $T(t, \alpha)$ en I , la derivada $G_T^\alpha f$ de f de orden α en el punto $t \in I$ se define como

$$G_T^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\lceil \alpha \rceil}} \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil} (-1)^k \binom{\lceil \alpha \rceil}{k} f(t - khT(t, \alpha)). \quad (1)$$

Si $a = \inf\{t \in I\}$ (respectivamente, $b = \sup\{t \in I\}$), entonces $G_T^\alpha f(a)$ (respectivamente, $G_T^\alpha f(b)$) se define con $h \rightarrow 0^-$ (respectivamente, $h \rightarrow 0^+$) en lugar de $h \rightarrow 0$ en el límite.

Si $T(t, \alpha) = 1$ cuando $\alpha \in \mathbb{N}$, se obtiene una derivada fraccionaria local conformable de cualquier orden. En particular, si $\alpha \in (0, 1]$ y $T(t, \alpha) = t^{1-\alpha}$, obtenemos la derivada conformable definida en [18]. Ver [1], [15] y [16] para más información sobre T_α . Si $T(t, \alpha)$ depende de t cuando $\alpha \in \mathbb{N}$, obtenemos una derivada fraccional local no-conformable de cualquier orden. Si $\alpha \in (0, 1]$ y $T(t, \alpha) = e^{t^{-\alpha}}$, obtenemos la derivada fraccional no-conformable definida en [10].

Definición 2 Sea I un intervalo $I \subseteq (0, \infty)$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. La derivada conformable $G^\alpha f$ de f de orden α en el punto $t \in I$ se define como

$$G^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\lceil \alpha \rceil}} \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil} (-1)^k \binom{\lceil \alpha \rceil}{k} f(t - kh t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha}). \quad (2)$$

Note que $T(t, \alpha) = t^{[\alpha]-\alpha} = 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. Sabemos del cálculo clásico que si f es una función definida en una vecindad del punto t , y existe la n -ésima derivada $D^n f(t)$, entonces

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh).$$

Por lo tanto, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ y f es suficientemente suave, la definición 2 coincide con la definición clásica de la n -ésima derivada de f .

En [18] se define una derivada conformable de la siguiente manera. Dada $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ and $\alpha \in (0, 1]$, la derivada de f de orden α en el punto t se define como

$$T_\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - ht^{1-\alpha})}{h}. \quad (3)$$

Es claro que T_α es un caso particular de G^α cuando $\alpha \in (0, 1]$ y $T(t, \alpha) = t^{1-\alpha}$.

3. El modelo fraccional conformable de Gompertz

Primeramente estudiamos la ecuación fraccional asociada al modelo de Gompertz.

Proposición 3 Sea $\alpha \in (0, 1]$, $a, K > 0$ and $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$. La solución general de la ecuación general fraccional de Gompertz

$$G_T^\alpha y(t) = ay(t) \ln\left(\frac{K}{y(t)}\right), \quad (4)$$

está dada por

$$y(t) = Ke^{Ce^{-aJ_{T, t_0}^\alpha(1)(t)}} \quad (5)$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Se puede probar que (4) con $y(t_0) = y_0$. Si elegimos $C = y_0$, entonces

$$y(t) = Ke^{y_0 e^{-aJ_{T, t_0}^\alpha(1)(t)}} \quad (6)$$

satisface $y(t_0) = y_0$,

Ahora estudiaremos un modelo fraccional de Gompertz a través de la derivada fraccional conformable G_T^α , con kernel, $T(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t}$:

$$\begin{aligned} G_T^\alpha y(t) &= ay(t) \ln\left(\frac{K}{y(t)}\right), & K, a > 0, & \alpha \in (0, 1], \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Donde $y(t)$ es el tamaño de las población al tiempo t , y_0 es el tamaño inicial de la población, a es la tasa de cambio y K es la capacidad de carga promedio.

La ecuación puede ser asociada con el modelo (7):

$$O_i = g(y(t_i)) + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (8)$$

donde O_i corresponde al i -ésimo valor observado con incertidumbre para la solución de (7) al tiempo discreto $t_i \in [0, T]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$; g es la función de las observaciones; y ϵ_i son los errores de medición, los cuales son considerados variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidos con distribución normal de media cero y varianza constante σ^2 (denotado como $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$).

De la definición de derivada fraccional propuesta en (1), en este trabajo usaremos el siguiente kernel: $T(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t}$. Note que, $T(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t} \rightarrow 1$ cuando $\alpha \rightarrow 1$.

Dada una función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in (0, 1]$, la G -derivada de f de orden α en el punto t se define como

$$G_T^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - he^{(\alpha-1)t})}{h}. \quad (9)$$

Teniendo en cuenta (6), la solución del modelo (7) está dado por

$$y(t) = K e^{\ln(\frac{y_0}{K}) e^{\frac{a}{1-\alpha}(e^{t_0(1-\alpha)} - e^{t(1-\alpha)})}}. \quad (10)$$

La Figura 1 muestra las curvas asociadas al modelo fraccional conformable de Gompertz, con $T(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t}$ y los siguientes valores de los parámetros: $a = 1$, $K = 1$, $y_0 = 0,002$. En la misma figura se muestra las siguientes aproximaciones: Derivada ordinaria (*negro*), $\alpha = \{0.3$ (*azul*), $\alpha = \{0.5$ (*amarillo*), $\alpha = \{0.75$ (*verde*), $\alpha = \{0.9$ (*rojo*).

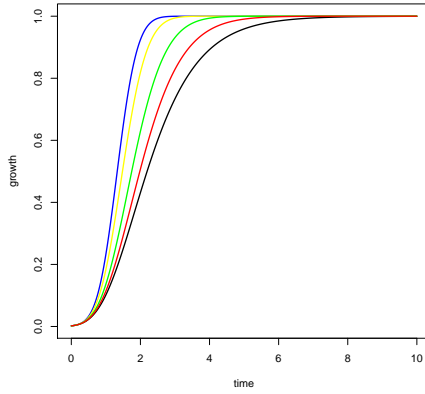


Fig 1.

Tomando $T(t, \alpha) = t^{1-\alpha}$, la solución del modelo (7) está dada por

$$y(t) = K e^{\ln(\frac{y_0}{K}) e^{\frac{a}{\alpha}(t_0^\alpha - t^\alpha)}}. \quad (11)$$

Tomando el límite $\alpha \rightarrow 1$ en (10), obtenemos la solución de (7) para el caso ordinario:

$$y(t) = K e^{\ln(\frac{y_0}{K}) e^{a(t_0 - t)}}. \quad (12)$$

La derivada fraccional de Caputo para $\alpha \in (0, 1)$, se define como

$$\mathcal{D}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$$

donde Γ es la función Gamma.

En ([3], [28]) los modelos matemáticos son estudiados usando la derivada fraccional de Caputo, a través de su relación numérica con la derivada fraccional de Grünwald-Letnikov. Para mayor información sobre esto (ver [24]). Usando esa relación tenemos

$$\mathcal{D}^\alpha x(t) \approx {}^{GL}\mathcal{D}^\alpha x(t),$$

donde ${}^{GL}\mathcal{D}^\alpha x(t)$ es la derivada de Grünwald-Letnikov, definida por

$${}^{GL}\mathcal{D}^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t - kh), \quad (13)$$

donde

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)},$$

obtenemos la siguiente aproximación, para h suficientemente pequeño,

$${}^{GL}D_a^\alpha y(t_m) \approx h^{-\alpha} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t_m - kh), \quad (14)$$

$$t_m = mh, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(t_m) = h^\alpha a y(t_{m-1}) \ln \left(\frac{K}{y(t_{m-1})} \right) + \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k} y(t_{m-1} - kh). \quad (15)$$

Para el caso de Grünwald-Letnikov usamos un método *iterativo* tipo Euler con costo computacional de n^2 y error $O(h)$.

La Figura 2 muestra las curvas asociadas a un problema directo para el modelo de Gompertz, con los siguientes valores de los parámetros: $a = 1$, $K = 1$, $y_0 = 0,1$, $\alpha = 0,85$, Para las aproximaciones: Derivada Ordinaria (*negro*), Derivada Fraccional Conformable con kernel $T(t, \alpha) = e^{(\alpha-1)t}$ (*rojo*), Khalil (*azul*) y Derivada Fraccional de Caputo (*verde*).

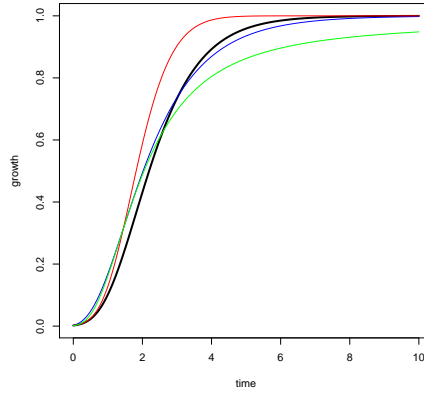


Fig 2.

Se aplicará la ecuación de Gompertz a un modelo del desarrollo de la Tuberculosis en México. Se presentarán resultados asociados al problema inverso tomando datos reales de la Tuberculosis en México, haciendo el ajuste de parámetros para cada enfoque fraccionario (Khalil, Caputo y conformable con el kernel dado) y el enfoque ordinario y se mostrarán las diferencias entre cada ajuste.

Trabajo realizado en conjunto con:

Fleitas, Alberto¹, Universidad Carlos III de Madrid, España; Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco de Juárez, México.

Nápoles Valdés, Juan E.², Universidad Nacional del Nordeste, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Corrientes Capital, 3400, Argentina

Sigarreta, José M.³, Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco de Juárez, México.



¹e-mail: satielfo@gmail.com

²e-mail: jnapoles@exa.unne.edu.ar

³e-mail: josemariasigarretaalmira@hotmail.com

Referencias

- [1] ABDEJJAWAD, T. *On conformable fractional calculus*. J. Comput. Appl. Math. (2015). 279 pp 57-66.
- [2] ABREU BLAYA, R.; ÁVILA ÁVILA, R.; BORY REYES, J. *Boundary value problems with higher order Lipschitz boundary data for polymonogenic functions in fractal domains* Applied Mathematics and Computation, (2015). 269 pp 802-808.
- [3] ARIZA HERNÁNDEZ, FRANCISCO J.; ARCIGA ALEJANDRE, MARTIN P.; FLEITAS, A.; SÁNCHEZ ORTIZ, JORGE *Derivative order estimation for a fractional logistic model* Submitted.
- [4] COOPER, LN.; LEE, AH.; TAPER, ML.; HORNER, JR. *Relative growth rates of predator and prey dinosaurs reflect effects of predation* Proceedings of the Royal Society, London B. (2008). 22(275) pp 2609-2615.
- [5] FLEITAS, A.; NÁPOLES VALDÉS, J. E.; RODRÍGUEZ, J M.; SIGARRETA, J. M. *On the generalized fractional derivative* Submitted.
- [6] FLEITAS, A.; GÓMEZ-AGUILAR, JOSÉ F.; NÁPOLES VALDÉS, J. E.; RODRÍGUEZ, J M.; SIGARRETA, J. M. *Analysis of the local Drude model involving the generalized fractional derivative* Optik (2019). 193. doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.163008
- [7] GELFAND, ALAN E.; SMITH, A. F. M. *Sampling-based approaches to calculating marginal densities* Journal of the American Statistical Association (1990). 85(410) pp 398-409.
- [8] GÓMEZ AGUILAR, J. F. *Analytical and Numerical solutions of a nonlinear alcoholism model via variable-order fractional differential equations* Physica A: Statistical Mechanics and its Applications (2018). 494 pp 52-75.
- [9] GOMPERTZ, B. *On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies* Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences. 115(1825) pp 513-583.
- [10] GUZMAN, P. M.; LANGTON, G.; LUGO, L. M.; MEDINA, J.; NÁPOLES VALDÉS, J. E. *A new definition of a fractional derivative of local type* J. Math. Anal. (2018). 9(2) pp 88-98.
- [11] HAMMAD, M. A.; KHALIL, R. *Abel's formula and wronskian for conformable fractional differential equation* International Journal of Differential Equations and Applications (2014). 13(3) pp 177-183.
- [12] HAMMAD, M. A.; KHALIL, R. *Total fractional differentials with applications to exact fractional differential equations* International Journal of Computer Mathematic (2018). 95(6-7) pp 1444-1452.
- [13] ILIE, M.; BIAZAR, J.; AYATI, Z. *General solution of second order fractional differential equations* Int. J. Appl. Math. Research (2018). 7(2) pp 56-61.
- [14] ILIE, M.; BIAZAR, J.; AYATI, Z. *The first integral method for solving some conformable fractional differential equations* Opt. Quantum Electron (2018). 50(2) pp 55.
- [15] JARAD, F.; UGURLU, E.; ABDELJAWAD T.; BALEANU, D. *On a new class of fractional operators* Adv. Differ. Equ. (2017) 2017(247), pp 16.

- [16] KATUGAMPOLA, V. N. *A new fractional derivative with classical properties* arXiv:1410.6535
- [17] KATUGAMPOLA, V. N. *New approach to a generalized fractional integral* Applied Mathematics and Computation (2011). 218(3) pp 860-865.
- [18] KHALIL, R.; AL HORANI, M.; YOUSEF, A.; SABABHEH, M. *A new definition of fractional derivative* J. Comput. Appl. Math. (2014). 264 pp 65-70.
- [19] KILBAS, A.; SRIVASTAVA, H.; TRUJILLO, J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* Math. Studies, North-Holland, New York, (2006).
- [20] LÓPEZ, S; PRIETO, M; DIJKSTRA, J; DHANOA. MS; FRANCE, J. *Statistical evaluation of mathematical models for microbial growth* International Journal of Food Microbiology (2014). 96(3) pp 289-300.
- [21] NORTON L. A. *A Gompertzian model of human breast cancer growth* Cancer Research (1988). 48(24) pp 7067-7071.
- [22] OLDHAM, K.; SPANIER, J. *The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration of Arbitrary Order* Academic Press, USA, (1974).
- [23] PEABODY, LE. *Growth curves and railway traffic* Journal of the American Statistical Association (1924). 19(148) pp 476-483.
- [24] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations* Academic Press, USA, (1999).
- [25] PROSCOTT, RB. *Law of growth in forecasting demand* Journal of American Statistical Association (1922) 18(140) pp 471-479.
- [26] RICKLEFS, RE. *A graphical method of fitting equations to growth curves* Ecology (1967). 48 pp 978-983.
- [27] RIFFENBURGH, RH; JOHNSTONE, PA. *Survival patterns of cancer patients* Cancer (2001). 91(12) pp 2469-2475.
- [28] SCHERER, R.; KALLA, SHYAM L.; TANG, Y.; HUANG, JIANFEI *The Grunwald-Letnikov method for fractional differential equations* Computers and Mathematics with Applications (2011). 62 pp 902-917.
- [29] SOLÍS-PÉREZ, J. E.; GÓMEZ-AGUILAR, J. F.; ESCOBAR-JIMÉNEZ, R. F.; TORRES, L.; OLIVARES-PEREGRINO, V. H. *Parameter Estimation of Fractional Gompertz Model Using Cuckoo Search Algorithm* In Fractional Derivatives with Mittag-Leffler Kernel, Springer, Cham. (2019). pp 81-95.
- [30] SIDDHARTHA, C.; GREENBERG, E. *Understanding the metropolis-hastings algorithm* The American Statistician (1995). 49(4) pp 327-335.
- [31] TJORVE, KMC.; GARCÍA-PEÑA, GE.; SZÉKELY, T. *Chick growth rates in charadriiformes: Comparative analyses of breeding climate, development mode and parental care* Journal of Avian Biology (2009). 40(5) pp 553-558.
- [32] YANG, X. J. *Local Fractional Calculus and Its Applications* Proceedings of FDA'12, The 5th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications (2012). pp 1-8.
- [33] WENPING, FAN; XIAOYUN, JIANG; HAITAO, QI *Parameter estimation for the generalized fractional element network Zener model based on the bayesian method* Physica A (2015). 427 pp 40-49.

- [34] ZULLINGER, EM.; RICKLEFS, RE.; REDFORD, KH.; MACE, M. *Fitting sigmoidal equations to mammalian growth curves* Journal of Mammalogy (1984). 65(4) pp 607-636.
- [35] KNOEMA *Health Nutrition and Population Statistics (World Bank)* (agosto 2019) Recuperado de <https://knoema.com/WBHNStats2016May/health-nutrition-and-population-statisticsworld-bank>
- [36] GOBIERNO DE MÉXICO *Tuberculosis* (agosto 2019) Recuperado de <https://www.gob.mx/salud/acciones-y-programas/tuberculosis>