XI CONGRESO LATINOAMERICANO
DE BIOLOGÍA MATEMÁTICA
SoLaBIMa 2019
Universidad Católica del Maule
22-25 de Octubre de 2019, Talca, Chile

Periodicidad en Dinámica Poblacional con Condición Inicial Fuzzy - Un Estudio en la Especie *Donax gemmula*

Daniel Eduardo Sánchez*
Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile

Resumen

En este trabajo analizamos los efectos provocados por la inserción de parámetros periódicos en modelos de dinámica poblacional donde la condición inicial es considerada incierta y dada por un número fuzzy. Específicamente, usaremos un sistema dinámico fuzzy (condición inicial fuzzy) asociado a un modelo logístico, con coeficientes periódicos, que representa la dinámica poblacional del molusco *Donax Gemmula*. La solución fuzzy del modelo será establecida vía el principio de extensión de Zadeh y comparada con datos reales de crecimiento poblacional.

Trabajo realizado en conjunto con:
Renata Zotin Gomes de Oliveira[1], Universidad Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.
Vinícius Francisco Wasques[2], Universidad Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.
Rodney Carlos Bassanezi[3], Universidad Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

1. Introducción

La gran mayoría de los modelos matemáticos usados en ecología teórica para estudiar dinámicas de poblaciones utilizan parámetros constantes en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Esta simplificación torna a los modelos más simples y en la forma de sistemas autónomos [4]. Sin embargo, un modelo biomatemático más realista debería utilizar tasas de natalidad, mortalidad, condiciones

*e-mail: danielsanch@gmail.com
[1]e-mail: renata.zotin@unesp.br
[2]e-mail: viniwasques@hotmail.com
[3]e-mail: rodney@ime.unicamp.br

ambientales, etc., como factores temporales. Matemáticamente, modelos poblacionales donde los parámetros son *periódicos* nos lleva al estudio de EDOs en la forma de sistemas no autónomos [9].

Además de modelar la dinámica poblacional a través de una EDO, describimos también la cantidad de población en un cierto instante t_0, por una condición que llamamos *condición inicial*. A este tipo de problema damos el nombre de problema de valor inicial (PVI). En general, los modelos clásicos no contemplan el caso en que dicha condición inicial sea incierta. De este modo, modelamos tal información a través de la teoría de conjuntos fuzzy. En este caso, obtenemos un sistema dinámico fuzzy llamado como problema de valor inicial fuzzy (PVIF) [2].

Resultados sobre la existencia y estabilidad de soluciones de sistemas determinísticos periódicos son bastante satisfactorios cuando las oscilaciones son pequeñas [3] y lo mismo ocurre cuando el sistema es fuzzy y asociado a un sistema autónomo [8]. No obstante, en este trabajo presentamos un modelo logístico de la dinámica poblacional del molusco bivalvo *Donax gemmula*, considerando la condición inicial como un número fuzzy y los parámetros periódicos, esto es, un PVIF no autónomo. Así, obtenemos una solución de este sistema dinámico fuzzy, vía el principio de extensión de Zadeh, y la comparamos con datos reales de crecimiento poblacional de esta especie.

Destacamos que la población *Donax gemmula*, que es la menor de las especies de moluscos bivalvos del género *Donax* presentes en Brasil, presenta ciclos de crecimiento periódicos de gran abundancia o de casi extinción [5]. La especie habita en una faja de playa normalmente expuesta a las mareas bajas [1] y se entierra en la superficie, pasando desapercibida en el lugar, a no ser en períodos de explosión poblacional [7] o por exposición indeseada dada por la influencia de las tempestades frecuentes en inverno, cuando los organismos se tornan más lentos en su actividad de excavación y son arrastrados para la playa, donde mueren [5].

2. Preliminares

2.1. Números fuzzy y Principio de extensión de Zadeh

Un *conjunto fuzzy* A de un universo U es caracterizado por una función de pertinencia $\varphi_A : U \to [0,1]$ en que $\varphi_A(x)$ indica el grado con que $x \in U$ pertenece a A. Denotamos a la familia de subconjuntos fuzzy de U por el símbolo $\mathcal{F}(\mathbb{U})$ y, por simplicidad, $\varphi_A(x) =: A(x)$. El α-*nivel* de $A \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$ es el subconjunto clásico de U definido por $[A]_\alpha = \{x \in U : A(x) \geq \alpha\}$ para $0 < \alpha \leq 1$. Cuando U es un espacio topológico, el 0-nivel es definido como la clausura del soporte de A, esto es, $[A]_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}}$. Para $\alpha = 1$ denotamos $core(A) = \{x \in \mathbb{R} : A(x) = 1\}$ [2].

Un conjunto fuzzy A es llamado de *número fuzzy* se cada α-nivel de A es un intervalo cerrado, limitado y no vacío de $\mathbb{R}$. Así, los α-niveles de A pueden ser representados por $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, $\forall \alpha \in [0,1]$. También, denotamos por $\mathbb{R}_\mathcal{F}$ a la familia de todos los números fuzzy de $\mathbb{R}$ y por $diam(A) = a_0^+ - a_0^-$ al diámetro de $A \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$. Un número fuzzy *triangular* es un caso típico de $\mathbb{R}_\mathcal{F}$, cuyos α-niveles son $[A]_\alpha = [(m - a_0^-)\alpha + a_0^-, (m - a_0^+)\alpha + a_0^+]$, $\forall \alpha \in [0,1]$, en que $[A]_0 = [a_0^-, a_0^+]$ e $m = core(A)$. La notación de un número fuzzy triangular será dada por la terna ordenada $(a_0^-; m; a_0^+)$ [2].

El *principio de extensión de Zadeh* es un método utilizado para extender operaciones típicas de los conjuntos clásicos en conceptos fuzzy [2].

Definição 1. [2] (Principio de Extensión de Zadeh). *Sean f una función tal que $f : X \to Z$ y A un subconjunto fuzzy de X. La extensión de Zadeh de f es la función $\widehat{f}$ que, aplicada a A, proporciona el subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Z, cuya función de pertinencia es dada por*

$$\varphi_{\widehat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{si} \quad f^{-1}(z) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si} \quad f^{-1}(z) = \emptyset, \end{cases} \tag{1}$$

para todo $z \in Z$, donde $f^{-1}(z) = \{x \in X \mid f(x) = z\}$.

En este trabajo, y en otros donde se modelan fenómenos dinámicos, los parámetros y condición inicial utilizados pueden ser obtenidos empíricamente, cargados de subjetividad e imprecisos. Así, un modelamiento más adecuado debe llevar en consideración estos factores de modo que la inexactitud inherente al proceso sea estimada de alguna manera. Así, los *sistemas dinámicos fuzzy* tienen esta finalidad cuando representamos parámetros o condición inicial por números fuzzy.

Sea un sistema dinámico determinístico y genérico dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t), k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \,, \end{cases} \tag{2}$$

donde k es un parámetro. Si consideramos que la condición inicial es imprecisa y modelada por un número fuzzy que es transportado por la extensión de Zadeh de la función de estado $\widehat{f}$, tenemos um sistema dinámico fuzzy, denotado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \widehat{=} f(t, x(t), k) \\ x(0) = \widehat{x}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \,. \end{cases} \tag{3}$$

Decimos que (3) es el *sistema fuzzy asociado* al sistema determinístico (2). Así, la *solución fuzzy* de (3) es la extensión de Zadeh de la solución de (2). En otras palabras, se $\Phi_t : U \to U$ es el flujo generado por la Eq. (2) (la solución determinística), definimos $\widehat{\Phi}_t : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$, la extensión de Zadeh de Φ_t, como el flujo fuzzy asociado a la Eq. (3) (la solución fuzzy).

2.2. Modelo logístico con coeficientes periódicos y solución canónica

Considere el siguiente problema de valor inicial (PVI), establecido por la ecuación logística con coeficientes periódicos, para $x(t) > 0$ en $t \in [t_0, T]$, dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{k(t)}\right) \,, \\ x(t_0) = x_0 \,. \end{cases} \tag{4}$$

Una vez que la ecuación diferencial de (4) es del tipo Bernoulli, podemos determinar, bajo ciertas condiciones, una solución analítica [9, 10] en forma cerrada y descrita por la ecuación integral:

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\int_{t_0}^{t} r(\tau) d\tau}}{1 + x_0 \int_{t_0}^{t} \left(e^{\int_{t_0}^{\tau} r(\xi) d\xi}\right) \frac{r(\tau)}{k(\tau)} d\tau}. \tag{5}$$

La solución para un PVI, como en (4), es dicha *canónica* si es un atractor global para x positivo y $0 \leq s < \infty$ [9]. Luego, el PVI dado por (4) posee una solución canónica que es dada por

$$x^*(t) = \left[\int_0^\infty \left(e^{-\int_0^s r(t-\sigma) d\sigma}\right) \frac{r(t-s)}{k(t-s)} ds\right]^{-1}. \tag{6}$$

Destacamos que la solución canónica em Eq. (6) es una solución asintótica de la Eq. (5), esto es, $x(t) \to x^*(t)$ para $t \to \infty$ (independiente de la condición inicial x_0). Además de lo anterior, en el caso en que $r(t)$ e $k(t)$ son funciones periódicas, la solución canónica también lo será [9, 10].

3. Dinámica Poblacional del *Donax gemmula*

De acuerdo con las características fisiológicas del *Donax gemmula*, las tasas de natalidad y mortalidad varían con el tiempo, presentando un padrón estacional positivamente correlacionado con la temperatura del agua durante el año [5]. Las tempestades de inverno son probablemente las más fatales, una vez que el molusco bivalvo pierde su movilidad en temperaturas bajas, dificultando su fijación en la arena [6].

Consideramos la tasa de crecimiento intrínseca dada por $\alpha(t) = r(t) - m(t)$, donde $r(t)$ es la tasa de reclutamiento y $m(t)$ es la tasa de mortalidad. Como $m(t)$ depende también de factores abióticos, consideramos $m(t) = d(t) + \lambda f(t)$, siendo $d(t)$ correspondiente a la tasa de mortalidad fisiológica, $f(t)$ una medida de intensidad de tempestad y λ una constante de proporcionalidad abiótica.

Si $P = P(t)$ es la densidad poblacional del *Donax gemmula*, podemos formular su dinámica usando un modelo del tipo logístico:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = r(t)P\left(1 - \dfrac{P}{K}\right) - \left(d(t) + \lambda f(t)\right)P = \alpha(t)P\left(1 - \dfrac{P}{k(t)}\right) \\ P(0) = P_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{7}$$

donde $t \in [t_0, T]$ y $k(t) = K \cdot m(t)$ es la capacidad de soporte del sistema, representando la abundancia máxima de la especie donde no es común la ocurrencia de tempestades. Los parámetros $r(t)$, $d(t)$ y $f(t)$ son considerados periódicos y positivos, con $\omega > 0$ el menor periodo entre ellos y, consecuentemente $\alpha(t)$ y $k(t)$ también son ω-periódicos.

La ecuación (7) puede aun ser escrita como:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \alpha(t)P - \beta(t)P^2 \\ P(0) = P_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{8}$$

donde $\beta(t) = \dfrac{\alpha(t)}{k(t)}$.

Finalmente, observamos que el PVI (8) posee misma estructura que el modelo logístico en (4), cuya solución analítica y canónica (considerando $P_0 \in \mathbb{R}^+$) pueden ser determinadas mediante la resolución de las ecuaciones (5) y (6), respectivamente.

4. Modelo Fuzzy y solución vía extensión de Zadeh

En este trabajo extenderemos el modelo propuesto en (8) considerando una condición inicial fuzzy. De esta forma tenemos el siguiente sistema fuzzy asociado (un PVIF), que representa la dinámica poblacional $P = P(t)$ de la especie *Donax gemmula* dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} \mathrel{\widehat{=}} \alpha(t)P - \beta(t)P^2\,, \\ P(t_0) = \widehat{P}_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \tag{9}$$

donde la condición inicial $\widehat{P}_0$ es dada por un número fuzzy (considerando $[\widehat{P}_0]_0 \subset \mathbb{R}^+$).

La solución fuzzy del modelo (9) puede ser obtenida mediante la aplicación del principio de extensión de Zadeh (Definición 1) sobre la solución del modelo determinístico asociado en (8) [2, 8].

Formalmente, sea el conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^+$ tal que existe una solución $P(\cdot, P_0)$ de (8) (dada en (5)) con $P_0 \in U$ en el intervalo $[t_0, T]$, y $\forall t \in [t_0, T]$, $P(t, \cdot)$ es continuo en U. Así, podemos definir al operador $\Phi_t : U \to \mathbb{R}^+$, dado por $\Phi_t(P_0) = P(t, P_0)$, que es la única solución de (8) continua y relativa a P_0 [8]. Aplicando el principio de extensión de Zadeh sobre el operador Φ_t, obtenemos $\widehat{\Phi}_t : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ que es la solución fuzzy del problema (9) con condición inicial $\widehat{P}_0 \in \mathcal{F}(U)$ [8].

5. Simulación y Resultados

Los valores de los parámetros a usar en nuestra simulación fueron obtenidos por medio de datos recogidos por Paes en 1989 [5, 9]. Considerando que el *reclutamiento* máximo se dá en verano y que el mínimo es en invierno, una función con estas características es:

$$r(t) = r_1 + r_2 \frac{1 - \cos(\frac{\pi t}{6})}{2}$$

donde, r_1 es la tasa mínima de nacimientos independientemente de las condiciones ambientales y r_2 es el aumento de nacimientos propiciados por la mejoría de las condiciones climáticas. Los valores encontrados experimentalmente son próximos de $r_1 = 0,3$ y $r_2 = 0,2$.

La *mortalidad fisiológica* fue estimada como siendo proporcional a la cantidad de individuos adultos em cada instante $d(t) = \lambda H(t)$, donde $\lambda = 0,2$ (empíricamente) es la tasa de mortalidad fisiológica de adultos en el instante t. Para $H(t)$, fue hecha una interpolación con datos reales:

$$H(t) = 0,3025 + 0,1225 \sin\left(\frac{\pi(t-3)}{6}\right).$$

El máximo de mortalidad sucede durante las tempestades de inverno. En verano la mortalidad disminuye. Utilizando la escala de intensidad de 0 a 4 para las tempestades observadas en la región, la *intensidad de la tempestad* $f(t)$ fue simulada como siendo:

$$f(t) = 1,3083 + 3,5279 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{12}\right).$$

Considerando el tiempo $t = [0, 30]$ (en meses), otros parámetros relevantes son $\beta = 0,06$ (obtenido empíricamente), $k = 650$ (obtenido desde literatura) y $P_0 = 122$ (observado por Paes [5]). Finalmente, como condición inicial fuzzy usamos al número fuzzy triangular $(52\,;122\,;192)$.

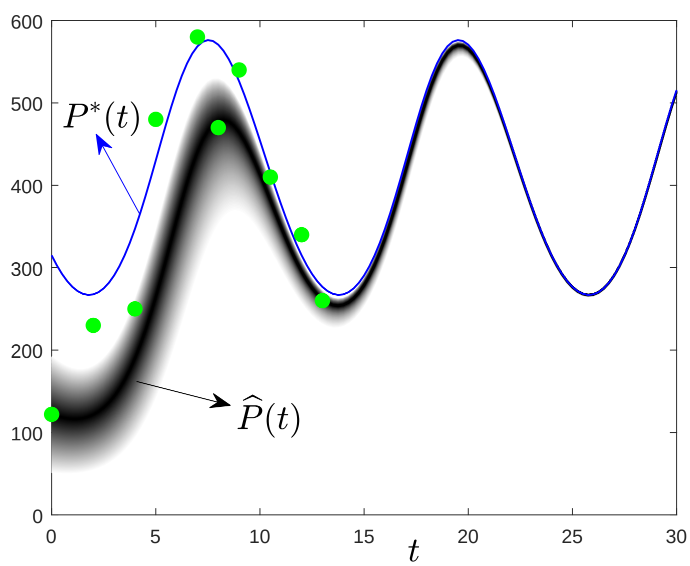

Figura 1: Solución canónica $P^*(t)$ (linea azul) de (8) y solución fuzzy $\widehat{P}(t)$ de (9) en escala de grises (de blanco a negro los α-niveles de 0 hasta 1) de la dinámica poblacional de la especie *Donax gemmula*. En puntos verdes, son colocados los datos reales de población extraídos desde [5, 9].

Figura 1 muestra la solución fuzzy $\widehat{P}(t)$ de (9) y la solución canónica $P^*(t)$ del modelo determinístico asociado (8). Adicionalmente, los puntos verdes muestran datos reales de la población de *Donax gemmula* durante algunos meses [5, 9]. Observamos una buena aproximación en la comparación de datos reales (puntos verdes) y la solución fuzzy (flujo fuzzy en escala de grises).

6. Conclusiones

En este trabajo presentamos una forma alternativa de modelamiento biomatemático de fenómenos complexos donde, la subjetividad del especialista puede estar contemplada. Proponemos inicialmente modelos dinámicos fuzzy considerando la condición inicial incierta y dada por um número fuzzy, esto es, un problema de valor inicial fuzzy (PVIF). Presentamos un resultado que relaciona flujos de sistemas determinísticos con sistemas fuzzy mostrando una coherencia entre las características de estabilidad entre tales sistemas en un estudio sobre la dinámica poblacional de *Donax gemmula*.

La solución fuzzy de este PVIF, que es basado en un modelo logístico con parámetros periódicos, es obtenida a través del principio de extensión de Zadeh. Constatamos que, así como ocurre en el caso clásico, la solución fuzzy se aproxima (converge) a la solución canónica del modelo determinístico asociado (ver en Figura 1). Como trabajo futuro pretendemos estudiar la estabilidad de la solución fuzzy y, además, los casos en que los parámetros también son inciertos y dados por números fuzzy.

Referencias

[1] Barroso C. K., Rabay S. G, Passos F. D., Matthews-Cascon H. An extended geographical distribution of Donax gemmula Morrison, 1971 (Bivalvia: Donacidae): new record from the Brazilian Northeastern coast. *Journal of species lists and distribution* **9**(5): 1087–1090, 2013.

[2] Barros L. C., Bassanezi R. C. Lodwick W. A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics. Theory and Applications.* Springer, 2017.

[3] Cushing J. M. Stable Positive Periodic Solutions of the Time-Dependent Logistic Equation under Possible Hereditary lnfluences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **60**(3): 747–754, 1977.

[4] Edelstein-Keshet L. *Mathematical models in biology.* Classics in Applied Mathematics, Vol. 46, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005.

[5] Paes E. T. *Biologia e ecologia de Donax gemmula Morrison na zona de arrebentação da praia do Cassino.* Master thesis, UFRS, Brazil, 1989.

[6] Paes E. T., Blinder P. B., Bassanezi R. C. O meio Ambiente como fator de predação: um estudo populacional de Donax Gemmula. *Revista Biomatemática* **2**: 134–142, 1992.

[7] Passos F. D., Domaneschi O. Biologia e anatomia funcional de Biologia e anatomia funcional de Donax gemmula Morrison (Bivalvia, Donacidae) do litoral de São Paulo, Brasil, *Revista Brasileira de Zoologia* **21**(4): 1017–1032, 2004.

[8] Mizukoshi M. T., Barros L. C., Chalco-Cano Y., Román-Flores H., Bassanezi R. C. Fuzzy differential equations and the extension principle. *Information Sciences* **177**(17): 3627–3635, 2007.

[9] Zotin R. *Efeitos abióticos e a periodicidade em dinâmica populacional.* Master thesis, University of Campinas, Brazil, 1993.

[10] Zotin R., Bassanezi R. C. Modelos de dinâmica populacional com parâmetros periódicos. *Revista Biomatemática* **3**: 170–195, 1993.