

Un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional racional no monotónica y depredador generalista

Paulo César Tintinago Ruíz, Eduardo González Olivares, Lina María Gallego Berrio



Universidad del Quindío, Armenia Q., Colombia
Instituto de Filosofía y Ciencias de la Complejidad
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Santiago, Chile



pctintinago@uniquindio.edu.co, eduardo.gonzalez@pucv.cl,
linag@uniquindio.edu.co

1. Introducción

Actualmente, se distinguen principalmente dos tipos de modelos tiempo continuo, para describir la depredación: El primer tipo fue propuesto por el biólogo ruso Georgii F. Gause en 1934, y corresponde a un modelo compartimentado o de transferencia de masa o energía.

El segundo tipo como alternativa al modelo de Lotka-Volterra, fue formulado en 1948 por el ecólogo escocés, Patrick Holt Leslie (1900-1972) [3].

Los modelos depredador-presa del tipo Leslie, también conocidos como del tipo Leslie-Gower [4] se caracterizan fundamentalmente porque la ecuación diferencial que describe el crecimiento de los depredadores es del tipo logístico [6], en la cual la capacidad de soporte del medio ambiente, es proporcional al tamaño de la población de presas, i.e. $K_y = nx$. Además, la respuesta funcional es lineal [2]. El modelo de Leslie es descrito por el sistema EDO:

$$LG_{\rho}(x,y) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K}) - qxy \\ \frac{dy}{dt} = s(1 - \frac{y}{nx})y \end{cases} \quad (LG)$$

donde $\rho = (r, K, q, s, n) \in \mathbb{R}_+^5$, y los parámetros tienen diferentes significados ecológicos.

Generalizando estos modelos se asume que la capacidad de soporte del medio ambiente es variable y dependiente de la cantidad de presas disponibles. Se incorporan también distintas respuestas funcionales.

En este trabajo se asumen dos modificaciones al modelo original propuesto por Leslie:

- los depredadores disponen de un alimento alternativo en el caso que el tamaño poblacional de su presa favorita es escasa, y la capacidad de carga del medio ambiente del depredador es representada por la función $K_y = nx + c$ [5]
- la respuesta funcional racional es no-monotónica o Holling tipo IV, descrita por la función

$$h(x) = \frac{qx}{x^2 + bx + a}$$

con $q > 0$, $a > 0$, y $b \in \mathbb{R}$. Como $h(x) > 0$, entonces $x^2 + bx + a > 0$; por lo tanto, $b^2 - 4a < 0$, y $-2\sqrt{a} < b < 2\sqrt{a}$. Además, $h(x)$ tiene un valor máximo cuando $x = \sqrt{a}$.

Esta forma de respuesta funcional generaliza la expresada por $h(x) = \frac{qx}{x^2 + a^2}$ que ha sido utilizada en el siguiente trabajo [2]. La función $h(x)$ representa una respuesta funcional no monótona que describe un comportamiento antipredador (APB antipredator behavior) denominado *formación de grupo de defensa* [1, 2, 5, 6].

2. El modelo

El modelo es descrito por un sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo del tipo Kolmogorov [5] dado por:

$$X_{\mu}(x,y) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qy}{x^2 + bx + a} \right) x \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx + c} \right) y, \end{cases} \quad (1)$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ denotan los tamaños poblacionales de presas y depredadores en función del tiempo $t \geq 0$. Los parámetros son positivos, es decir, $\mu = (r, q, a, s, K, n, b, c) \in \mathbb{R}_+^8$ y tienen diferentes significados ecológicos.

El parámetro $c > 0$ indica la cantidad de alimento alternativo para los depredadores cuando la presa preferida no se encuentra disponible [6]; esto implica que los depredadores son *generalistas*.

3. Resultados principales

Para simplificar los cálculos, se hace un cambio de variables y reescalamiento del tiempo, lo cual es descrito en la siguiente proposición.

Proposición. Sistema topológicamente equivalente
El campo vectorial $X_{\nu}(x,y)$ o sistema (1) es topológicamente equivalente al sistema polinomial del quinto grado.

$$Y_{\eta}(u,v) : \begin{cases} \frac{du}{dt} = ((1-u)(u^2 + Bu + A) - Qv)(u + C)u \\ \frac{dv}{dt} = S(u + C - v)(u^2 + Bu + A)v \end{cases} \quad (2)$$

con $A = \frac{a}{K^2}$, $B = \frac{b}{K}$, $Q = \frac{qn}{rk^2}$, $S = \frac{s}{rk}$ y $C = \frac{c}{nK}$, donde $\eta = (A, B, Q, S, C) \in \mathbb{R}_+^5$.

El sistema (2) está también definido en todo el primer cuadrante, es decir:

$$\bar{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+.$$

Los puntos de equilibrio del sistema (2) o singularidades del campo vectorial $Y_{\eta}(u,v)$ son $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,C)$ los puntos de equilibrio positivo (u_e, v_e) , que satisfacen las ecuaciones de las isoclinas $v = u + C$ y $v = \frac{1}{Q}(1-u)(u^2 + Bu + A)$.

Luego, $v_e = u_e + C$ donde u_e es la abscisa de los puntos de equilibrio positivos; luego, es una solución de la ecuación de tercer grado:

$$P(u) = u^3 - (1-B)u^2 + (A-B+Q)u - (A-CQ) = 0. \quad (3)$$

Basados en la regla de signos de Descartes, para el polinomio $P(u)$ se pueden presentar 27 casos diferentes de posibles soluciones de acuerdo a los signos de los coeficientes de la ecuación (3). Puede tener una raíz positiva real única o tres raíces positivas reales diferentes o dos raíces positivas reales distintas, una de ellas con multiplicidad dos.

Las soluciones del sistema 2 son acotadas.

Se utiliza el método de las cantidades de Lyapunov para determinar la cantidad de ciclos límite.

4. Simulaciones

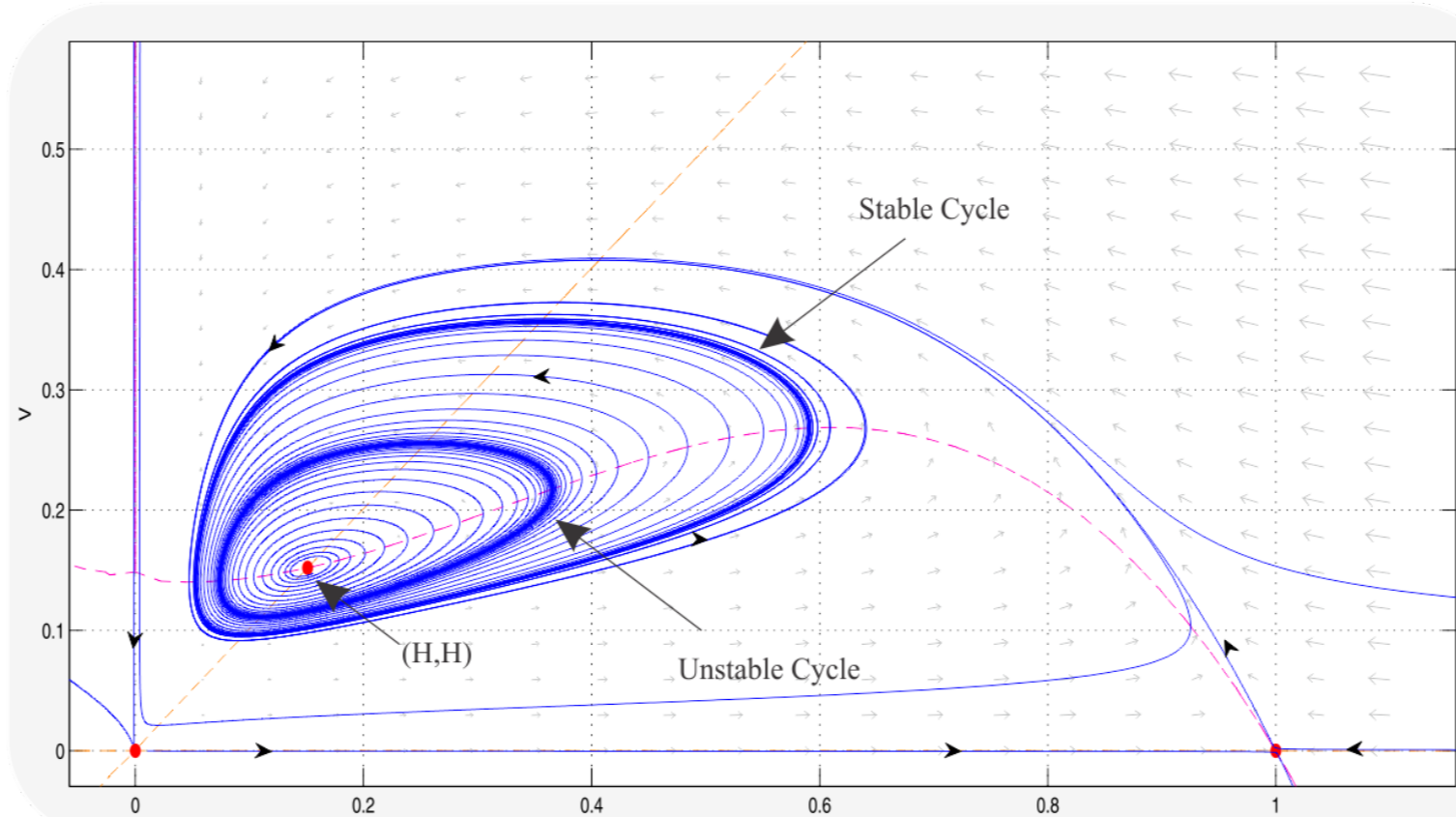


Figura 1: Dos ciclos límites

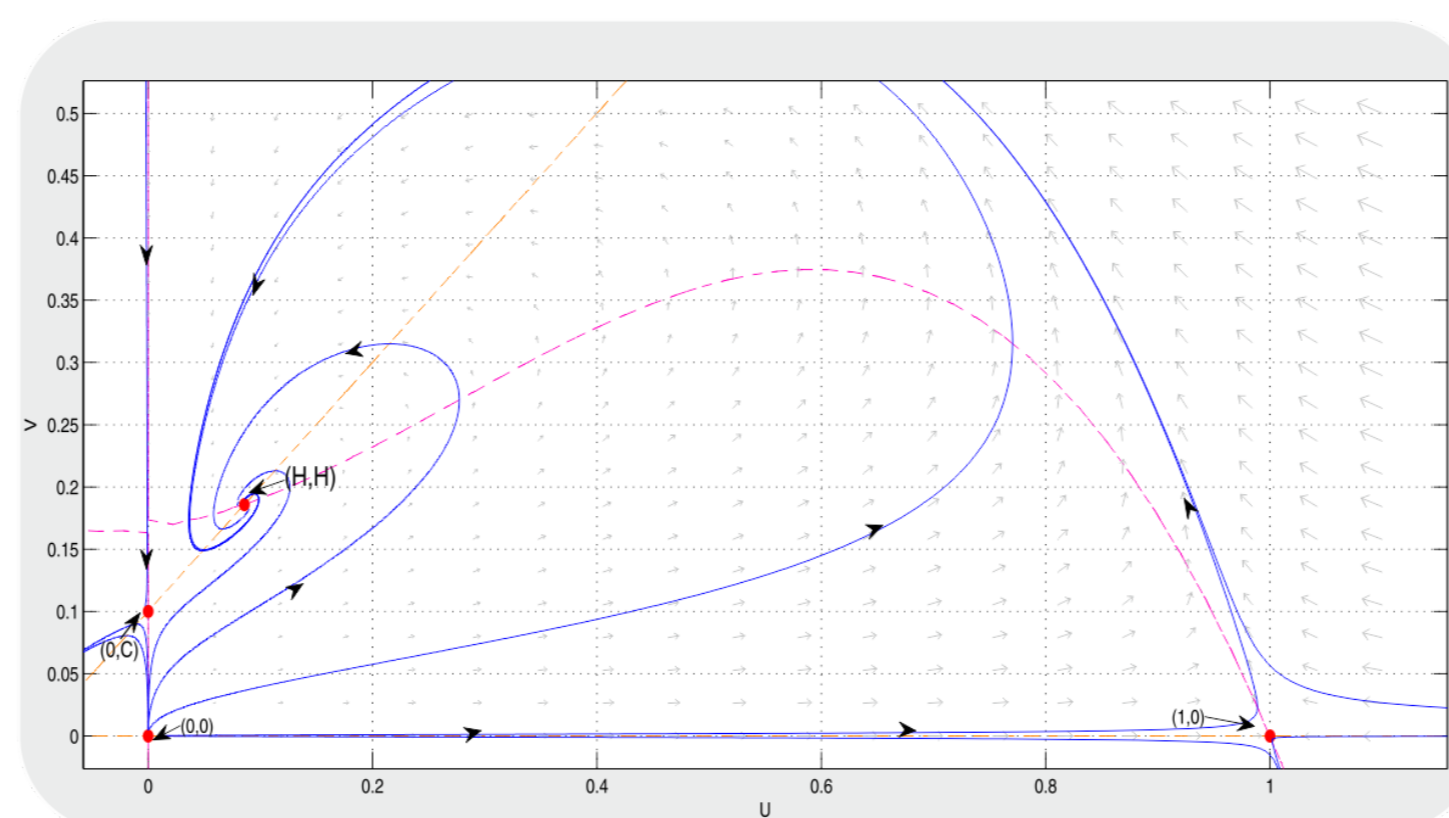


Figura 2: Foco repulsor

5. Conclusiones

Establecemos condiciones en el espacio de parámetros para las cuales existen dos puntos de equilibrio positivos, determinando la naturaleza de cada uno de ellos. Los cálculos son realizados en un sistema polinomial topológicamente equivalente al sistema (1) [1, 2], el cual es obtenido mediante un cambio de variables y un reescalamiento del tiempo. Entre los resultados más importantes, se demuestra la

existencia de una curva separatriz $\bar{\Sigma}$, dividiendo el comportamiento de las soluciones o trayectorias del sistema. Esto implica que para un mismo conjunto de parámetros dos soluciones muy cercanas pero a diferente lado de esa separatriz $\bar{\Sigma}$, tendrán diferentes y alejados ω -límites, lo cual significa que las soluciones son altamente sensibles a las condiciones iniciales. En el sistema estudiado se presenta

el fenómeno de bi-estabilidad, pues para una misma condición de parámetros, las trayectorias pueden converger al punto $(0, C)$ y al mismo tiempo otras convergen a un punto de equilibrio positivo atractor $(H, H + C)$ o bien, a un ciclo límite estable. Las oscilaciones se mantendrán hasta que

el ciclo límite creado por bifurcación de Hopf aumente su diámetro hasta coincidir con la curva heteroclínica que une los puntos sillas $(0,0)$ y $(1,0)$. Cuando se rompe la heteroclínica (existiendo una bifurcación heteroclínica), el punto $(0, C)$ pasa a ser un atractor casi global, siendo $(H, H + C)$ la única solución que no converge a $(0, C)$.

Referencias

- [1] A. Aguilera-Moya and E. González-Olivares, A Gause type model with a generalized class of non-monotonic functional response, In R. Mondaini (ed.), *Proceedings of the Third Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology*, E-Papers Serviços Editoriais, Ltda., Rio de Janeiro, Volumen 2 (2004) 206-217.
- [2] B. González-Yañez, E. González-Olivares and J. Mena-Lorca, Multistability on a Leslie-Gower type predator-prey model with non-monotonic functional response, in R. Mondaini and R. Dilao (Eds), *BIOMAT 2006 International Symposium on Mathematical and Computational Biology* (2007) 359-384.
- [3] P. H. Leslie, Some further notes on the use of matrices in population mathematics, *Biometrika* 35 (1948) 213-245.
- [4] P. H. Leslie and J. C. Gower, The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species, *Biometrika* 47 (1960) 219-234.
- [5] P. C. Tintinago-Ruí, L. M. Gallego-Berrio y E. González-Olivares, Una clase de modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional racional no monotónica y alimento alternativo para los depredadores, submitted (2019).
- [6] P. Turchin, *Complex populations dynamics: A theoretical/empirical synthesis*, Princeton University Press, 2003.
- [7] V. Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, S.VI, IT (1926) 31-113.