

Análisis de un sistema de Filippov que modela la interacción presa-depredador en el contexto de la broca del café *H. hampei*

Carlos Andrés Trujillo-Salazar, Gerard Olivar-Tost, Hernán Darío Toro-Zapata.

Universidad del Quindío - Armenia (Colombia), Universidad de Aysén - Coyhaique (Chile)

catrujillo@uniquindio.edu.co, gerard.olivar@uaysen.cl,
hdtoro@uniquindio.edu.co

1. Introducción

El café es el producto agrícola de mayor impacto en la economía colombiana, pero tanto la cantidad como la calidad del grano se ven gravemente afectados por la broca del café *Hypothenemus hampei*, su principal plaga (ver Fig. 1). Para contrarrestar los efectos de este escarabajo existen diferentes métodos de control, entre otros, el biológico y el cultural.



Figura 1: *Izq.* Broca adulta perforando grano de café. *Der.* Grano de café deteriorado por acción de broca.

El control biológico se fundamenta en la disminución de los efectos de la broca mediante la introducción en los cafetales de otros seres vivos, como por ejemplo depredadores, quienes constituyen el colectivo más numeroso de sus enemigos naturales y entre los cuales se encuentran las hormigas, que habitan de manera natural los cultivos de café y debido a su tamaño, tienen acceso a los granos. El control cultural tiene como finalidad minimizar la disponibilidad de alimento y refugio de la plaga, mediante la implementación de prácticas manuales, como por ejemplo la utilización de trampas artesanales con atrayentes alcohólicos. En ambos casos, el objetivo es disminuir la población de broca a niveles que no causen daños significativos a la producción de café [3].

2. Modelo básico

La broca del café (presa) y la hormiga (depredador) son respectivamente denotadas con B y R en el modelo (1), el cual se plantea con base en los siguientes supuestos:

- Ambas poblaciones están homogéneamente distribuidas (la posición es irrelevante) y crecen de manera logística, sin tener en cuenta fenómenos de migración.
- La hormiga depreda todos los estados de broca (huevos, larvas, pupas y adultos) y el número de “consumos” es proporcional al número promedio de presas, por lo que se usa una respuesta funcional Holling tipo II para describir la depredación.
- Teniendo en cuenta que la hormiga en los cafetales no se alimenta exclusivamente de broca, se considera un aumento adicional en el crecimiento intrínseco de las hormigas atribuido a la depredación [1].

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \omega B \left(1 - \frac{B}{q}\right) - \frac{\alpha B}{B + \eta} R \\ \frac{dR}{dt} &= \left(r + \frac{\varepsilon \alpha B}{B + \eta}\right) R \left(1 - \frac{R}{k}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Los puntos de equilibrio del sistema (1) son

$$E_1 = (0, 0), \quad E_2 = (q, 0), \quad E_3 = (0, k), \quad E_4 = (\bar{B}_4, k),$$

$$\bar{B}_4 = \frac{\omega(q - \eta) + \sqrt{\omega^2(q - \eta)^2 + 4kq\alpha\omega(B_0 - 1)}}{2\omega}.$$

Un quinto punto de equilibrio es $E_5 = (\bar{B}_5, k)$, pero no se menciona porque carece de sentido biológico. Además, la expresión B_0 , conocida **Tasa Neta de Reproducción** y definida como el número de hembras por cada hembra en una generación, está dada por

$$B_0 = \frac{\eta\omega}{k\alpha}. \quad (2)$$

Proposición 1 La estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (1) está dada de la siguiente manera:

- E_1 es inestable del tipo fuente
- E_2 es inestable del tipo punto de silla
- E_3 es local y asintóticamente estable si $B_0 < 1$. Y es inestable del tipo punto de silla si $B_0 > 1$
- E_4 no existe si $B_0 < 1$. Y es local y asintóticamente estable si $B_0 > 1$

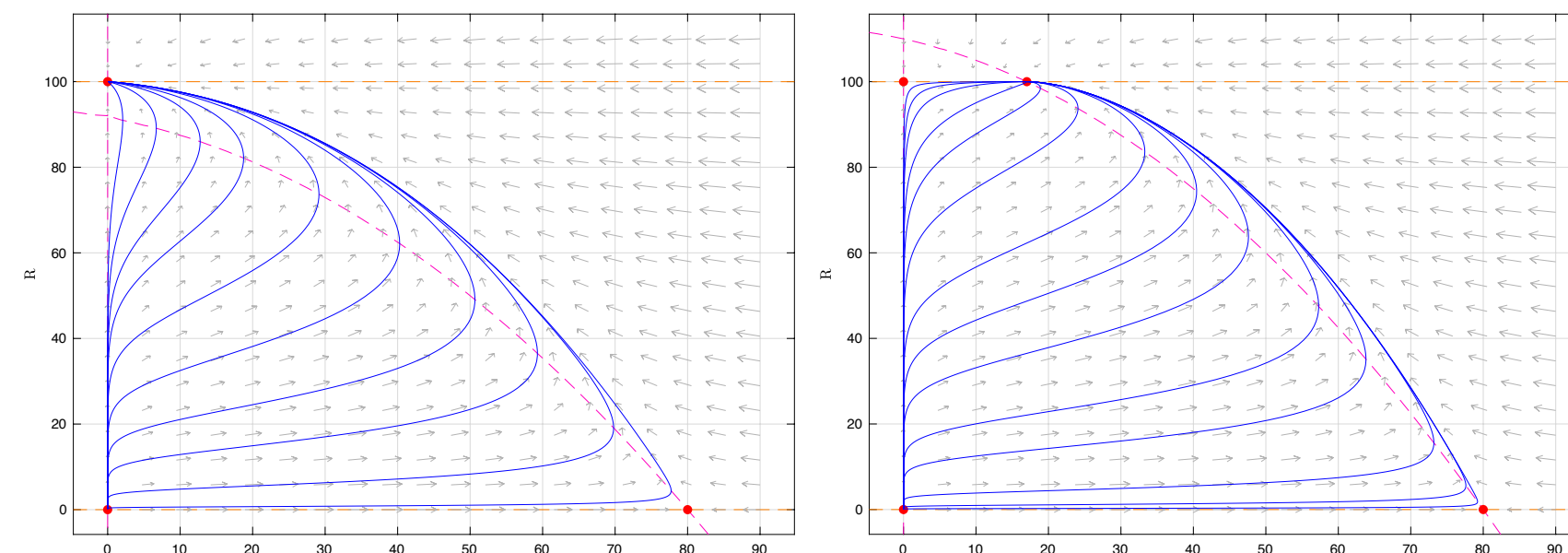


Figura 2: *Izq.* $B_0 < 1$, la broca se extingue y hay 3 equilibrios. *Der.* $B_0 > 1$, la broca prospera y hay 4 equilibrios.

3. Modelo no suave

Se considera que las brocas además de la depredación, también se ven afectadas por la implementación de un control cultural a base de trampas artesanales con atrayentes alcohólicos, lo que se incorpora en el modelo como una captura constante de brocas. Estas trampas se ubican cerca del beneficiadero, lo que causa molestias al caficultor y por eso no son utilizadas de manera permanente. De acuerdo con esto, se asume que la captura no se implementa hasta que la cantidad de brocas no alcance el 5% de su capacidad de carga.

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \omega B \left(1 - \frac{B}{q}\right) - \frac{\alpha B}{B + \eta} R - \begin{cases} 0, & \text{si } B < 0,05q \\ h, & \text{si } B > 0,05q \end{cases} \\ \frac{dR}{dt} &= \left(r + \frac{\varepsilon \alpha B}{B + \eta}\right) R \left(1 - \frac{R}{k}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

El plano de fase del sistema no suave (3) está dividido en dos regiones S_1 y S_2 , $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y separadas por una frontera Σ denominada región de conmutación, dada por:

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = B - 0,05q = 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : B = \frac{q}{20}\right\},$$

donde $x = (B(t), R(t))^T$ y H es un campo escalar suave. Luego, S_1 y S_2 están dadas por

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : B < 0,05q\} \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : B > 0,05q\}. \end{aligned}$$

De este modo, se plantea el *Sistema de Filippov*

$$\dot{x} = \begin{cases} f^{(1)}(x), & x \in S_1 \\ f^{(2)}(x), & x \in S_2. \end{cases} \quad (4)$$

Siguiendo la metodología descrita en [2], para $x \in \Sigma$, es decir, para $B = \frac{q}{20}$, se define la función

$$\sigma(x) = \langle \nabla H(x), f^{(1)}(x) \rangle \langle \nabla H(x), f^{(2)}(x) \rangle.$$

En este caso

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \left(\frac{q\alpha}{q + 20\eta}\right)^2 (R - R_1)(R - R_2) \\ R_1 &= \frac{19q\omega(q + 20\eta)}{400\alpha} \\ R_2 &= \frac{19q\omega(q + 20\eta)}{400\alpha} - \frac{h(q + 20\eta)}{q\alpha} = R_1 - \frac{h(q + 20\eta)}{q\alpha}. \end{aligned}$$

Se definen la regiones de cruce Σ_c y de deslizamiento Σ_s de la siguiente manera

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma : \sigma(x) > 0\} \quad \Sigma_s = \{x \in \Sigma : \sigma(x) \leq 0\}.$$

Proposición 2 Regiones de cruce y de deslizamiento.

- Si $h < \frac{19q\omega}{400}$, en la región de conmutación Σ se presenta cruce para $0 \leq R < R_2$ o $R > R_1$, mientras que se presenta deslizamiento para $R_2 \leq R \leq R_1$.
- Si $h > \frac{19q\omega}{400}$, en la región de conmutación Σ se presenta cruce para $R > R_1$ y se presenta deslizamiento para $0 \leq R \leq R_1$.

Puntos especiales de deslizamiento del sistema (4)		
Si $h < \frac{19q\omega}{400}$	Equilibrio de deslizamiento	$P_1\left(\frac{q}{20}, k\right)$, si $R_2 < k < R_1$
	Punto de tangencia	$T_1\left(\frac{q}{20}, R_1\right)$
	Punto de tangencia	$T_2\left(\frac{q}{20}, R_2\right)$
Si $h > \frac{19q\omega}{400}$	Equilibrio de deslizamiento	$P_1\left(\frac{q}{20}, k\right)$, si $k < R_1$
	Equilibrio de deslizamiento	$P_2\left(\frac{q}{20}, 0\right)$
	Punto de tangencia	$T_1\left(\frac{q}{20}, R_1\right)$

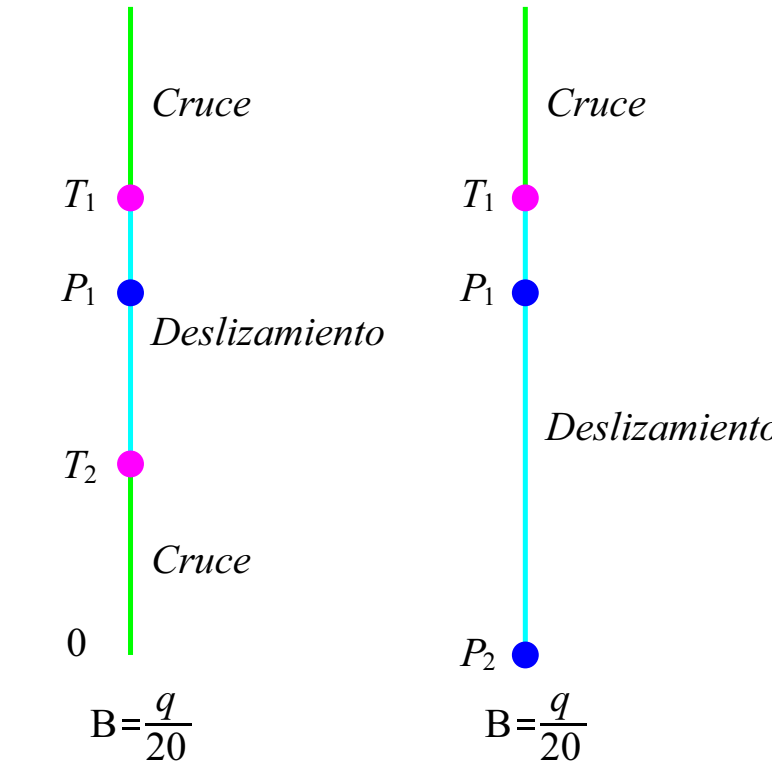


Figura 3: Resumen gráfico de los puntos especiales de deslizamiento del sistema (4). *Izq.* Caso $h < \frac{19q\omega}{400}$. *Der.* Caso $h > \frac{19q\omega}{400}$.

Considerar captura h tiene sentido si hay broca. Según la Proposición 1, broca del café y hormiga coexisten si $B_0 = \frac{\eta\omega}{k\alpha} > 1$, de donde $\alpha < \frac{\eta\omega}{k}$.

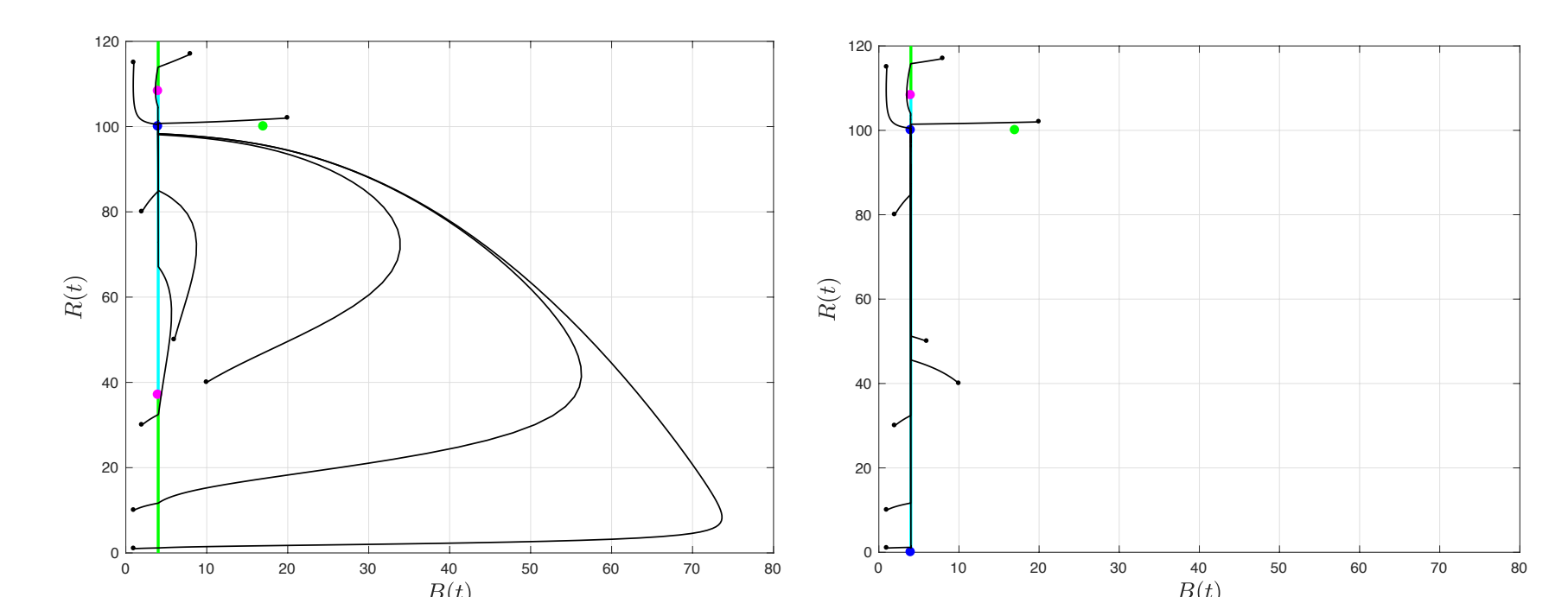


Figura 4: Plano de fase del modelo (4) con la región de conmutación a la izquierda del equilibrio de coexistencia E_4 . *Izq.* $h = 5 < \frac{19q\omega}{400}$. *Der.* $h = 15 > \frac{19q\omega}{400}$.

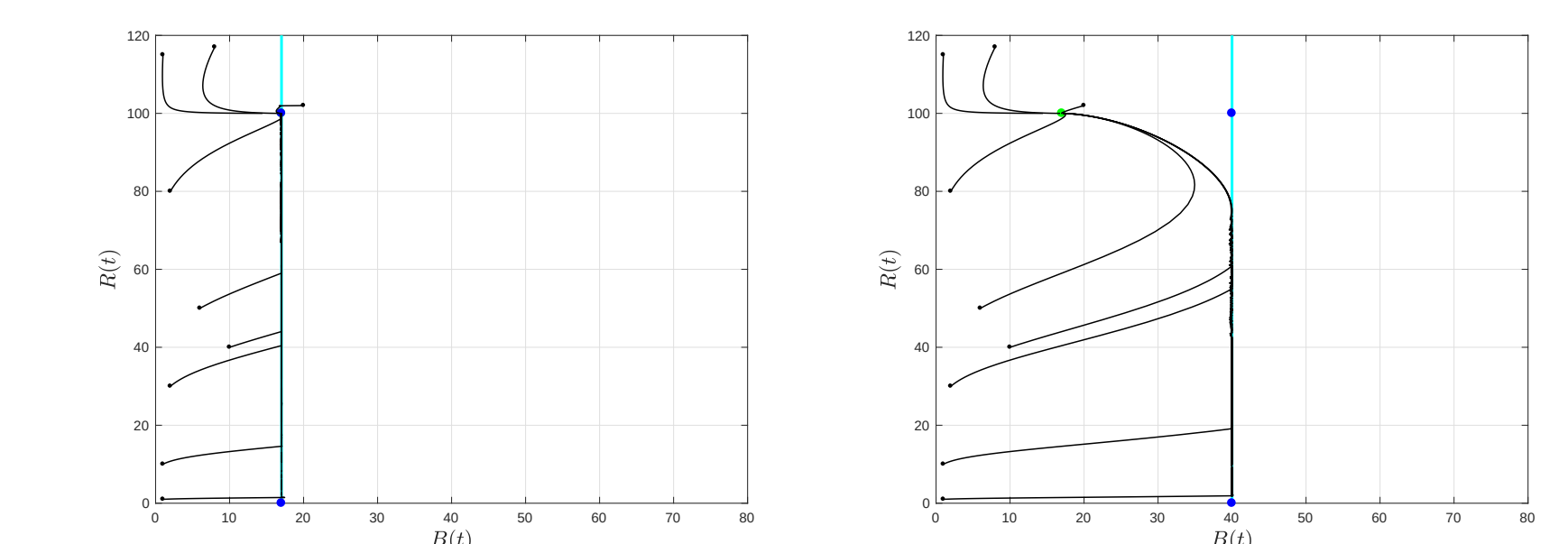


Figura 5: Plano de fase del modelo (4). *Izq.* $h = 40 > \frac{19q\omega}{400}$, la región de conmutación pasa sobre el equilibrio de coexistencia E_4 . *Der.* $h = 78 > \frac{19q\omega}{400}$, la región de conmutación está a la derecha del equilibrio de coexistencia E_4 .

4. Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos, la implementación del control cultural representado a través de captura constante de broca mediante trampas artesanales a base de alcohol, aunque no genere la extinción de la broca porque $B_0 > 1$, si impide su crecimiento en número cuando esta población tiende a equilibrarse. Más aún, la región de conmutación hace las veces de una especie de barrera, lo que hace pensar en la generación de condiciones para “alargar” la región de conmutación.

5. Agradecimientos

Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Quindío. Proyecto de investigación 922 *Modelado matemático mediante redes complejas de problemáticas de impacto económico y social en el Quindío: la transmisión del VIH y la dispersión de la broca del café*.

Referencias

- [1] Arias, J., Martínez, H., Sepulveda, L., and Vasilieva, O. (2015). “Predator-prey model for analysis of *Aedes aegypti* population dynamics in Cali”. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 105(4), 561-597.
- [2] Kuznetsov, Y., Rinaldi, S., and Gragnani, A. (2003). “One-parameter bifurcations in planar Filippov systems”. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 13(08), 2157-2188.
- [3] Vega, F., Infante, F., and Johnson, A. (2015). “The genus *Hypothenemus*, with emphasis on *H. hampei*, the coffee berry borer”. In *Bark Beetles* (pp. 427-494). Academic Press.