

# Una formulación de elementos finitos de presión-vorticidad para

## las ecuaciones de Oseen

A. Altamirano<sup>1</sup>, V. Anaya<sup>2</sup>

1 Doctorado en Modelamiento Matemático Aplicado (*DM<sub>2</sub>A*)  
Universidad Católica del Maule  
Talca-Chile.

2 Grupo de Investigación de Métodos Numéricos y Aplicaciones (*GIMNAP*)  
Universidad del BÍO-BÍO  
Concepción-Chile.

alex.altamirano@alu.ucm.cl, vanaya@ubiobio.cl



### 1. Introducción

El estudio de los problemas de fluidos ha adquirido interés por sus variadas aplicaciones en diferentes ciencias, tales como: ingeniería, oceanografía, aerodinámica y biomédicas, entre otras. Para aproximar la dinámica del fluido en términos de velocidad, vorticidad y presión se usan modelos tales como Stokes, Navier Stokes, Oseen, Brinkman y su uso depende del tipo de fenómeno que se produzca en el fluido, un ejemplo de esto es el avance en la aerodinámica de los automóviles, lograda minimizando la fuerza de arrastre mediante la aplicación de un extenso análisis del flujo sobre la superficie.

Este trabajo se enfoca en el estudio del modelo de Oseen para estudiar la dinámica de un fluido incompresible en términos de vorticidad y presión, modelo que es una extensión de la ley de Darcy para describir el comportamiento del flujo laminar de un fluido viscoso dentro de un material poroso con permeabilidad posiblemente heterogénea, de modo que el flujo está dominado por el régimen de Darcy en algunas regiones y por Stokes en otras partes. Otra instancia en la que se encuentra el problema Oseen, es a partir de una discretización temporal de las ecuaciones de Stokes que modelan el movimiento de un fluido incompresible. Se introduce una formulación variacional para las ecuaciones de Oseen formuladas en términos de vorticidad y presión. La velocidad está completamente desacoplada de las ecuaciones del momento, y luego puede recuperarse de las principales incógnitas. También se propone un nuevo método de elementos finitos, que consiste en elementos Nédélec y elementos continuos por partes de orden igual, para vorticidad y presión, respectivamente. El análisis de errores para el modelo se lleva a cabo en las normas naturales.

### 2. El Modelo

#### 2.1 Problema modelo

Consideremos el problema Oseen, en un dominio  $\Omega$  con frontera  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  y disjunta. Las ecuaciones escritas en términos de velocidad  $\mathbf{u}$ , vorticidad  $\omega$ , presión  $p$ ,  $\beta$  dato que es la aproximación de la velocidad, para un fluido viscoso incompresible, dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{u} + \sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega + \nu^{-1/2} \omega \times \beta + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \omega - \sqrt{\nu} \operatorname{curl} \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_1, \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{a} \times \mathbf{n} & \text{on } \Gamma_2, \\ p &= 0 & \text{on } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (1)$$

#### 2.2 Formulación variacional

Se definen los siguientes espacios funcionales

$$Z := H(\operatorname{curl}; \Omega),$$

$Q := H^1(\Omega) \cap \mathbf{L}_0^2(\Omega)$  si  $\Gamma_2 = \emptyset$ , o  $Q := H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$  si  $\Gamma_2 \neq \emptyset$  donde

$$\|q\|_Q^2 := \|q\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla q\|_{0,\Omega}^2, \quad \|\boldsymbol{\theta}\|_Z^2 := \|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2 + \nu \|\operatorname{curl} \boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2.$$

hallar  $(\omega, p) \in Z \times Q$  tal que

$$\mathcal{A}((\omega, p), (\boldsymbol{\theta}, q)) = F(\boldsymbol{\theta}, q) \quad \forall (\boldsymbol{\theta}, q) \in Z \times Q, \quad (2)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\omega, p), (\boldsymbol{\theta}, q)) &:= \sigma \int_{\Omega} \omega \cdot \boldsymbol{\theta} \\ &+ \int_{\Omega} (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega + \nabla p) \cdot (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} + \nabla q) \\ &+ \nu^{-1/2} \int_{\Omega} (\omega \times \beta) \cdot (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega + \nabla q), \\ F(\boldsymbol{\theta}, q) &:= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} + \nabla q) + \sigma \sqrt{\nu} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta})_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

#### 2.3 Discretización de elementos finitos

Sea  $\{\mathcal{T}_h(\Omega)\}_{h>0}$  una familia de particiones de forma regular en la región  $\Omega$ , mediante tetraedros  $T$  de diámetro  $h_T$ , con tamaño de malla  $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$ . Además, para cualquier  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ , se introduce el espacio local de Nédélec  $\mathbb{N}_k(T) := \mathcal{P}_{k-1}(T)^3 \oplus R_k(T)$ , para definir los siguientes subespacios de elementos finitos [2]

$$\begin{aligned} Z_h &:= \{\boldsymbol{\theta}_h \in Z : \boldsymbol{\theta}_h|_T \in \mathbb{N}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}, \\ Q_h &:= \{q_h \in Q : q_h|_T \in \mathcal{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Hallar  $(\omega_h, p_h) \in Z_h \times Q_h$  tal que

$$\mathcal{A}((\omega_h, p_h), (\boldsymbol{\theta}_h, q_h)) = F(\boldsymbol{\theta}_h, q_h) \quad \forall (\boldsymbol{\theta}_h, q_h) \in Z_h \times Q_h, \quad (3)$$

donde la forma bilineal  $\mathcal{A} : (Z_h \times Q_h) \times (Z_h \times Q_h) \rightarrow \mathbb{R}$  y el funcional lineal  $\mathcal{F} : Z_h \times Q_h \rightarrow \mathbb{R}$  ahora se especifican como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\omega_h, p_h), (\boldsymbol{\theta}_h, q_h)) &:= \sigma \int_{\Omega} \omega_h \cdot \boldsymbol{\theta}_h \\ &+ \int_{\Omega} (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega_h + \nabla p_h) \cdot (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta}_h + \nabla q_h) \\ &+ \nu^{-1/2} \int_{\Omega} (\omega_h \times \beta) \cdot (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega_h + \nabla q_h), \\ \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}_h, q_h) &:= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta}_h + \nabla q_h) + \sigma \sqrt{\nu} (\mathbf{a} \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta}_h)_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.1** Asumiendo que  $\frac{2\|\beta\|_{\infty,\Omega}^2}{\nu\sigma} < 1$ . Entonces, el problema discreto (3) esta bien puesto.

**Demostración.** Para probar este resultado se sabe que (3) corresponde a un sistema de ecuaciones lineales y cuadrado. En efecto, considerando  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , con  $(\boldsymbol{\theta}_h, q_h) = (\omega_h, p_h)$  se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma \|\omega_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega_h + \nabla p_h\|_{0,\Omega}^2 \\ + \nu^{-1/2} \int_{\Omega} (\omega_h \times \beta) \cdot (\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega_h + \nabla p_h) &= 0, \end{aligned}$$

mostrando que  $\omega_h = \mathbf{0}$  y  $p_h = 0$ .  $\square$

#### 2.4 Estimación de error a priori

**Lema 2.1** Para todo  $\boldsymbol{\theta} \in H^s(\operatorname{curl}; \Omega)$   $s \in (1/2, k]$ , existe una constante  $C > 0$  independiente de  $h$ , tal que

$$\|\boldsymbol{\theta} - \mathcal{R}_h \boldsymbol{\theta}\|_Z \leq Ch^s \|\boldsymbol{\theta}\|_{H^s(\operatorname{curl}; \Omega)}.$$

**Lema 2.2** Para todo  $q \in H^{1+s}(\Omega)$ ,  $s \in (1/2, k]$  existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|q - \Pi_h q\|_Q \leq Ch^s \|q\|_{H^{1+s}(\Omega)}.$$

Comenzamos escribiendo la siguiente ecuación de error:

$$\mathcal{A}((\omega - \omega_h, p - p_h), (\boldsymbol{\theta}_h, q_h)) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\theta}_h, q_h) \in Z_h \times Q_h. \quad (4)$$

Luego, el siguiente lema es una herramienta de gran importancia para el orden de convergencia para la presión y vorticidad.

**Lema 2.3** Asumiendo que  $\frac{2\|\beta\|_{\infty,\Omega}^2}{\nu\sigma} < 1$ . Para todo  $(\boldsymbol{\theta}, q) \in Z \times Q$ , existen constantes  $C_1, C_2 > 0$  tal que

$$C_1 (\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} + \nabla q\|_{0,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2) \leq \mathcal{A}((\boldsymbol{\theta}, q), (\boldsymbol{\theta}, q)), \quad (5)$$

y

$$\mathcal{A}((\boldsymbol{\theta}, q), (\boldsymbol{\theta}, q)) \leq C_2 (\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\nu} \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} + \nabla q\|_{0,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2). \quad (6)$$

Se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 2.2** Asumiendo que  $\omega \in H^s(\operatorname{curl}; \Omega)$ , y  $p \in H^{1+s}(\Omega)$ , para cada  $s \in (1/2, k]$ . Entonces, existe  $C > 0$ , independiente de  $h$  y  $\mu$ , tal que

$$\begin{aligned} \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + \|\sqrt{\nu} \operatorname{curl}(\omega - \omega_h) + \nabla(p - p_h)\|_{0,\Omega} \\ + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^s (\|\omega\|_{H^s(\operatorname{curl}; \Omega)} + \|p\|_{H^{1+s}(\Omega)}) \end{aligned}$$

**Demostración.** El resultado es consecuencia de (4), (5), (6), junto con los lemas 2.1 y 2.2.  $\square$

#### 2.5 Recuperando el campo de velocidad

Sea  $\omega \in Z$  y  $p \in Q$  las soluciones únicas de (2). Entonces, de acuerdo con las ecuaciones modelo tenemos que

$$\mathbf{u} = \sigma^{-1} (\mathbf{f} - \sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega - \nu^{-1/2} \omega \times \beta - \nabla p) \quad \text{in } \Omega. \quad (7)$$

Si  $\omega_h \in Z_h$  y  $p_h \in Q_h$  son las soluciones únicas de (3), entonces la función

$$\mathbf{u}_h := \sigma^{-1} (\mathcal{P}_h \mathbf{f} - \sqrt{\nu} \operatorname{curl} \omega_h - \nu^{-1/2} \omega_h \times \beta - \nabla p_h), \quad (8)$$

es una aproximación de la velocidad, donde  $\mathcal{P}_h : \mathbf{L}^2(\Omega)^3 \rightarrow U_h := \{\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^3 : \mathbf{h}|_T \in \mathcal{P}_{k-1}(T)^3 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$  es el  $\mathbf{L}^2$ -operador ortogonal. Entonces, para cada  $s \in (0, k]$ ,

$$\|\mathbf{u} - \mathcal{P}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \leq Ch^s \|\mathbf{u}\|_{s,\Omega}. \quad (9)$$

Notamos  $\mathbf{u}_h$  es discontinuo en cuanto a elementos.

**Teorema 2.3** Sea  $\omega \in Z$  y  $p \in Q$  soluciones únicas de (2), y  $\omega_h \in Z_h$  y  $p_h \in Q_h$  soluciones únicas de (3). Asumiendo que  $\omega \in H^s(\operatorname{curl}; \Omega)$ ,  $p \in H^{1+s}(\Omega)$  y  $\mathbf{f} \in H^s(\Omega)^3$ , para cada  $s \in (1/2, k]$ . Entonces, existe una constante  $C > 0$  independiente de  $h$  y  $\nu$  tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^s (\|\mathbf{f}\|_{H^s(\Omega)} + \|\omega\|_{H^s(\operatorname{curl}; \Omega)} + \|p\|_{H^{1+s}(\Omega)}).$$

**Demostración.** De (7) y (8), y la desigualdad triangular, se deduce que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} &\leq \sigma^{-1} (\|\mathbf{f} - \mathcal{P}_h \mathbf{f}\|_{0,\Omega} \\ &+ \|\sqrt{\nu} \operatorname{curl}(\omega - \omega_h) - \nabla(p - p_h)\|_{0,\Omega} \\ &+ \nu^{-1/2} \|(\omega - \omega_h) \times \beta\|_{0,\Omega}). \end{aligned}$$

Entonces, el resultado se desprende del teorema 2.2 y (9).  $\square$

### 3. Resultados

Consideremos el dominio  $\Omega = (0, 1)^2$ , los coeficientes  $\sigma = 100$  y  $\nu = 0,1$ , con frontera  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  disjuntos.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ \sin(2\pi x) \cos(\pi y) \end{pmatrix}, \quad \beta = \mathbf{u}, \quad p = x^4 - y^4.$$

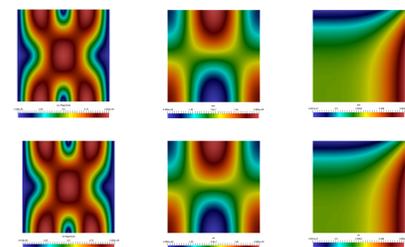
Se procede a construir una serie de mallas triangulares uniformemente y sucesivamente refinadas para  $\Omega$  y calculamos los errores experimentales y las tasas de convergencia definidas por

$$e(\omega) = \|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega}, \quad e(p) = \|p - p_h\|_{0,\Omega},$$

$$e(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}, \quad r(\cdot) = \log(e(\cdot)/\hat{e}(\cdot))[\log(h/\hat{h})]^{-1},$$

donde  $h, \hat{h}$  son dos mallas consecutivas y  $e, \hat{e}$  son los errores calculados, respectivamente.

A continuación se presentan gráficas de soluciones exactas y aproximadas.



En la primera fila se muestra la función exacta de la velocidad, vorticidad y presión y la segunda muestra la función aproximada para velocidad, vorticidad y presión.

Test de convergencia en una secuencia de triangulaciones uniformemente refinadas.

$h$	$e(w)$	$r(w)$	$e(p)$	$r(p)$	$e(u)$	$r(u)$
0.372678	0.199886	1.455126	0.068622	0.691176	0.235615	0.766333
0.190086	0.045383	2.202206	0.017156	2.059064	0.116289	1.048851
0.093856	0.009024	2.288756	0.003782	2.142812	0.055203	1.055751
0.047891	0.002190	2.104440	0.000834	2.246188	0.027126	1.056022
0.026245	0.000573	2.228707	0.000219	2.224742	0.013663	1.140230
0.013382	0.000140	2.094855	0.000051	2.172746	0.006770	1.042499

### 4. Conclusiones

- Se obtuvo una superconvergencia para la vorticidad y presión mediante elementos finitos Nédélec y polinomios continuos a trozos, respectivamente.
- Se recuperó la velocidad mediante un post-proceso.

### 5. Agradecimientos

Este trabajo es realizado con el apoyo de CONICYT-Chile a través de los proyectos FONDECYT 11160706; por DIUBB a mediante los proyectos 171508GI/VC y 165608-3/R.

### Referencias

- V. Anaya, D. Mora, and R. Ruiz-Baier, Pure vorticity formulation and Galerkin discretization for the Brinkman equations. IMA J. Numer. Anal., **37**, (2017), no. 4, 2020–2041.
- V. Girault and P.A. Raviart, Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- C.-C. Tsai and S.-Y. Yang, On the velocity-vorticity-pressure least-squares finite element method for the stationary incompressible Oseen problem. J. Comput. Appl. Math., **182**, (2005), no. 1, 211–232.