XI CONGRESO LATINOAMERICANO
DE BIOLOGÍA MATEMÁTICA
SoLaBIMa 2019
Universidad Católica del Maule
22-25 de Octubre de 2019, Talca, Chile

Dinámica de algunos modelos depredador-presa tipo Leslie con respuesta funcional no monótona y efecto Allee en las presas

Francisco Javier Reyes Bahamón*
Universidad Surcolombiana, Neiva, Huila, Colombia

Resumen

En este trabajo se realiza el análisis dinámico de una clase de modelos depredador-presa tipo Leslie-Gower modificado.

El modelo es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomo y no lineal, la respuesta funcional de los depredadores es Holling tipo IV o no-monótona, el crecimiento de las presas es afectada por el efecto Allee.

Un aspecto importante de nuestro análisis es el estudio del punto $(0;0)$, pues este tiene una fuerte incidencia en el comportamiento del sistema y es esencial para la existencia y extinción de ambas especies.

Se realizan simulaciones en Matcont para ilustrar los resultados analíticos.

Palabras clave. Modelo depredador-presa, efecto Allee, Respuesta funcional, estabilidad, bifurcación, ciclos límites.

Joint work with::
Eduardo González-Olivares[1], Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Casilla 4059, Valparaíso, Chile.
Julio Cesar Duarte Vidal[2], Universidad Surcolombiana, Neiva, Huila, Colombia.
Gerard Olivar Tost[3], Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

*e-mail: `fjreyesb@unal.edu.co`
[1]e-mail: `eduardo.gonzalez@pucv.cl`
[2]e-mail: `julio.duarte@usco.edu.co`
[3]e-mail: `golivart@unal.edu.co`

1 Introducción

Uno de los objetivos fundamentales en el estudio de la dinámica de los sistemas complejos, como son las cadenas alimenticias, es el análisis de la interacción entre dos especies, en particular la dinámica entre los depredadores y sus presas [1]. La mayoría de los modelos utilizados para explicar dicha interacción son extensiones del modelo de competencia de Lotka-Volterra [4] que son modelos compartimentados. En este trabajo el modelo depredador-presa tiene una concepción diferente, teniendo en cuenta las siguientes características: *i.) El crecimiento de las presas es afectada por el efecto Allee. ii.) La respuesta funcional de los depredadores es no-monótona [6]. iii.) La ecuación del depredador es una función de crecimiento de tipo logístico.* El tercer aspecto caracteriza a los modelos de tipo Leslie-Gower [2], propuesto por P.H. Leslie en 1948, donde la capacidad de carga del medio ambiente de los depredadores K_y es una función que depende de la cantidad de presas disponibles. Asumimos que la capacidad de carga es proporcional a la abundancia de presas, es decir, $K_y = nx$ donde $x = x(t)$ indica el tamaño de la población de presas y n es una medida de la calidad de la presa como fuente alimenticia para el depredador, en este caso se dice que el depredador es especialista [2].

1.1 El efecto Allee

Warder Clyde Allee fue un zoólogo y ecologísta de la Universidad de Chicago, y se interesó por investigar el comportamiento grupal de los animales. Pudo observar que el crecimiento poblacional se limita cuando las especies se encuentran aglomeradas y sin competencia [7]. En el contexto de la Dinámica Poblacional, el *Efecto Allee* representa una situación en la cual el factor de crecimiento de la población disminuye por debajo de cierta densidad de población mínima. En algunas circunstancias este factor de crecimiento puede llegar a ser negativo, originando un umbral de extinción (ver [8]). También llamado un nivel mínimo m de población viable, por debajo del cual la especie tiende a extinguirse. El modelo matemático, más simple que representa al *Efecto Allee* está dado por la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)(x - m), \tag{1}$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población de presas en cualquier tiempo t, mayor o igual que cero; $m > 0$ es el tamaño mínimo viable de la población (o umbral de extinción), $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca de la población y $K > 0$ es la capacidad de carga del medio ambiente. Si $m > 0$, la ecuación diferencial representa el *efecto Allee fuerte* o una descompensación crítica [8], donde la tasa de crecimiento en el límite de baja densidad es negativa. Si $0 < x < m$, la tasa de crecimiento es negativa, es decir, $\dfrac{dx}{dt} < 0$ lo que implica que la población se extingue. Es decir, la población debe superar este umbral para poder crecer. Si $m \leq 0$, la ecuación diferencial representa el *efecto Allee débil* o una descompensación pura, donde la tasa de crecimiento es positiva en la densidad cero y no tiene un umbral de crecimiento [8].

1.2 Respuesta funcional de los depredadores

La respuesta funcional, o tasa de consumo, expresa la acción de los depredadores en la tasa de crecimiento de la población de presas, y representa la cantidad de presas que puede consumir un depredador en una unidad de tiempo [1]. Estas fueron clasificadas en tres tipos por C.S Holling en 1959 [2]. En el año 1984, Taylor describe un cuarto tipo llamado Holling tipo IV o respuesta funcional no monótona [6]. En esta investigación, se asume que la respuesta funcional es no-monótona y es utilizada para modelar comportamientos antidepradotorios (APB), llamado formación de grupos de defensa [2] [8], el cual es empleado por las presas para evitar la depredación. La función viene dada por: $h(x) = \dfrac{qx^2}{x^2 - bx + a}$, donde a, b y c son parámetros positivos.

2 El modelo

El modelo de tipo Leslie-Gower modificado considerando que la población de presas es afectada por el efecto Allee [2] y con una respuesta funcional Holling tipo IV, es expresada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomas no-lineales de tipo Kolmogorov, dado por:

$$X_\mu : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)(x - m) - \dfrac{qx^2y}{x^2 - bx + a}, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = sy\left(1 - \dfrac{y}{nx}\right), \end{cases} \tag{2}$$

donde $x = x(t)$ y $y = y(t)$ indican el tamaño de la población de presas y depredadores, respectivamente, en cada tiempo $t \geq 0$ (medido como biomasa, el número de individuos o densidad por unidad de superficie o volumen), con $\mu = \left\{(r, K, m, q, a, b, s, n) \in \mathbb{R}_+^8 \;/\; 0 \leq m < K; b > 2\sqrt{a}\right\}$, es decir, todos los parámetros son positivos, todos tienen diferentes significados ecológicos. Con el fin de obtener un sistema topológicamente equivalente al sistema 2, realizaremos un cambio de variable y un cambio en la escala del tiempo.

Lema 1 *El sistema 2 es topológicamente equivalente al siguiente modelo de tipo Kolmogorov*

$$Z_\eta : \begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = u^2[(1-u)(u-M)(Au^2 - Bu + 1) - Nuv], \\ \\ \dfrac{dv}{d\tau} = Wv(u-v)(Au^2 - Bu + 1). \end{cases} \tag{3}$$

donde $\eta = (M, N, W, A, B) \in \mathbb{R}_5^+$ y $B > 2\sqrt{A}$.

2.1 Resultados básicos

Lema 2 *El conjunto* $\Lambda = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 /\; 0 \leq u \leq 1,\; v \geq 0\right\}$*, es una región de invarianza.*

Lema 3 *Las soluciones son acotadas.*

2.2 Naturaleza de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema 3 o singularidades del campo vectorial Z_η, son $P_0 = (0, 0)$, $P_M = (M, 0)$, $P_1 = (1, 0)$ y los puntos que se encuentran en la intersección de las curvas isoclinas:

$$(1-u)(u-M)(Au^2 - Bu + 1) - Nuv = 0,\; y,\; u - v = 0 \tag{4}$$

Estas últimas singularidades (u, v) satisfacen $u = v$ y por lo tanto u debe satisfacer la ecuación

$$(1-u)(u-M)(Au^2 - Bu + 1) - Nu^2 = 0. \tag{5}$$

2.2.1 Puntos críticos sobre los ejes

Se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio que se encuentran en los ejes u y v. Demostramos la existencia de una curva separatriz en el plano de fase que divide el comportamiento de las trayectorias.

Lema 4 *Para todo* (A, B, M, N, W) *el punto* $P_1 = (1, 0)$ *es un punto de silla.*

Lema 5 *Para todo* (A, B, M, N, W) *el punto* $P_M = (M, 0)$ *es un punto repulsor.*

Teorema 1 *El punto* $P_0 = (0, 0)$ *dominio del campo vectorial* Z_η *determina un sector parabólico y un sector hiperbólico. Es decir, existe una curva en el plano de fase que separa el comportamiento de las trayectorias: el punto* $(0, 0)$ *es atractor para ciertas trayectorias y silla para otras.*

3 Efecto Allee débil

Debido a las dificultades de cálculo asumiremos que $m = 0$, se tiene un caso particular de *efecto Allee débil* y el modelo es un sistema de tipo Kolmogorov, dado por:

$$X_\gamma : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx^2\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{qx^2y}{x^2 - bx + a}, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = sy\left(1 - \dfrac{y}{nx}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Debido a la gran cantidad de parámetros que tiene el sistema 6, realizaremos un cambio de variable y un cambio en la escala del tiempo.

El cambio de variable transforma el sistema 6 en uno topológicamente equivalente con campo vectorial $Z_\eta = \varphi \circ X_\mu$ [1], donde $Z_\eta(u,v) = P(u,v)\dfrac{\partial}{\partial u} + Q(u,v)\dfrac{\partial}{\partial v}$, descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales de cuatro parámetros del tipo de Kolmogorov:

$$\hat{Z}_\eta : \begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = u^3[(1-u)(Au^2 - Bu + 1) - Nv], \\ \\ \dfrac{dv}{d\tau} = Wv(u - v)(Au^2 - Bu + 1). \end{cases} \tag{7}$$

donde $\eta = \left\{(N, W, A, B) \in \mathbb{R}_4^+\right\}$ con $N = \dfrac{qnK}{ra}$, $W = \dfrac{s}{rK}$, $A = \dfrac{K^2}{a}$ y $B = \dfrac{bK}{a}$

3.1 Resultados Principales

Lema 6 *El conjunto* $\Gamma = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq u \leq 1, \ v \geq 0\right\}$ *es una región de invarianza.*

Lema 7 *Las soluciones son acotadas.*

3.2 Naturaleza de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema 7, o singularidades del campo vectorial $\hat{Z}_\eta$, son $P_0 = (0,0)$ y $P_1 = (1,0)$ y los puntos que se encuentran en la intersección de las curvas isoclinas:

$(1-u)(Au^2 - Bu + 1) - Nv = 0 \quad \text{y} \quad u - v = 0.$

Estas últimas singularidades (u,v) satisfacen $u = v$ y por lo tanto u debe satisfacer la ecuación

$(1-u)(Au^2 - Bu + 1) - Nu = 0,$

es decir, u debe ser la raíz del polinomio

$$p(u) = Au^3 - (B + A)u^2 + (1 + B + N)u - 1. \tag{8}$$

3.2.1 Puntos críticos sobre los ejes

Lema 8 *Para todo* (A, B, N, W) *el punto* $P_1 = (1,0)$ *es un punto de silla.*

Teorema 2 *El punto* $P_0 = (0,0)$ *del dominio del campo vectorial* $\hat{Z}_\eta$ *determina un sector parabólico y dos sectores hiperbólicos [8]. Es decir, existe una curva en el plano de fase que divide el comportamiento de las trayectorias: el punto* $(0,0)$ *es atractor para ciertas trayectorias y punto de silla para otras.*

Teorema 3 *Sean* $W^s(0,0)$ *y* $W^u(1,0)$ *las variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio* $(0,0)$ *y* $(1,0)$*, respectivamente. Existe un subconjunto abierto de valores de parámetros por los cuales* $W^s(0,0) \cap W^u(1,0)$ *es no vacía, dando origen a una curva heteroclínica* γ_h *en el primer cuadrante que contiene al equilibrio* $(0,0)$ *y* $(1,0)$.

Teorema 4 *Las variedades estable e inestable del punto silla (H_2, H_2) determinan una curva homoclínica.*

4 Conclusiones

En este trabajo se analizó una clase de modelos depredador-presa de tipo Leslie-Gower, considerando que la respuesta funcional de los depredadores fue Holling tipo IV o no-monótona y efecto Allee débil, cuando $m = 0$.

Para el sistema 7, se ha demostrado que posee dos sectores hiperbólicos y un sector parabólico, y la existencia de una curva separatriz determinada por la variedad estable del punto de equilibrio no-hiperbólico $(0, 0)$. Se puede concluir que para ciertas trayectorias próximas a estas curvas separatriz son muy sensibles a condiciones iniciales. En términos ecológicos, implica que a pequeñas perturbaciones debido a los cambios ambientales causados por la contaminación o por otros factores, podría provocar la extinción de ambas poblaciones.

Se demostró la existencia de una curva heteroclínica en el primer cuadrante que contiene a los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$, cuando $(u^*, v^s) \in W^s(0, 0)$ y $(u^*, v^u) \in W^u(1, 0)$. Desde el punto de vista ecológico, esto significa que las poblaciones pueden coexistir en relación a los tamaños poblacionales iniciales muy próximos al punto de equilibrio (H, H).

References

[1] E. González-Olivares and J. Mena-Lorca and A. Rojas-Palma and J.D. Flores, *Dynamical complexities in the Leslie-Gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey*, Applied Mathematical Modelling, vol. 35, pag. 366-381, 2011.

[2] E. González-Olivares. and P. Tintinago-Ruiz and A. Rojas-Palma, *A Leslie-Gower-type predator-prey model with sigmoid functional response*, International Journal of Computer Mathematics, vol. 92, pag. 1895-1909, 2015.

[3] E. González-Olivares and B. González and J. Mena-Lorca and R. Ramos-Jiliberto, *Modelling the Allee effect: Are the different mathematical forms proposed equivalents?*, Proceedings of the International Symposium on Mathematical and Computational Biology BIOMAT 2006, E-papers Serviços Editoriais Ltda., pag. 53-71, 2007.

[4] F. Courchamp and T. Clutton-Brock and B. Grenfell, *Inverse density dependence and the Allee effect*, Trends in Ecology and Evolution, vol. 14, pag. 405-410, 1999.

[5] F. Courchamp and L. Berec and J. Gascoigne, *Allee Effects in Ecology and Conservation*,Oxford University Press, 2008.

[6] H. Broer, and K. Saleh, and V. Naudot, and R. Roussarie, *Dynamics of a predator-prey model with nonmonotonic response function*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 18, pag. 221-251, 2007.

[7] P. A. Stephens, and W. J. Sutherland and R. P. Freckleton, *What is the Allee effect?*, Source: Oikos, vol. 87, pag. 185-190, 1999.

[8] R.A. Becerra-Klix, *Modelos de depredación del tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea y efecto Allee múltiple en las presas*, Tesis de Magister en Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 2013.