XI CONGRESO LATINOAMERICANO
DE BIOLOGÍA MATEMÁTICA
SoLaBiMa 2019
Universidad Católica del Maule
22-25 de Octubre de 2019, Talca, Chile

ANÁLISIS CUALITATIVO DE UNA POBLACIÓN DE ESPECIES BAJO EFECTO ALLE FUERTE CON INMIGRACIÓN DENSO DEPENDIENTE

Gustavo Ossandón Araya*
Universidad Tecnológica Metropolitana, Santiago, Chile

Resumen

El presente trabajo está basado en población de especies en situación de riesgo ecológico, debido a un bajo nivel poblacional que dificulta su sobrevivencia por efecto Allee [4]. Esta población, a su vez, recibe de forma continua un flujo migratorio, el cual podría ser inducido para lograr la presevación de la especie, o bien,ppodría producirse de forma natural. Se supondrá que el flujo migratorio presenta una correlación negativa con el tamaño pobacional, siendo máximo en ausencia total de individuos en el territorio y anulándose si la población ha alcanzado la capacidad de carga del medio.

Será de gran importancia determinar las condiciones sobre la tasa de migración, de modo que se permita garantizar la recuperación de la especie, así como también, el análisis de los puntos de equilibrios del sistema. [2]

Trabajo realizado en conjunto con:
Ricardo Castro Santis[1], Universidad Tecnológica Metropolitana, Santiago, Chile.

*e-mail: `gusosar@utem.cl`
[1]e-mail: `rcastro@utem.cl`

1. Introduction

En este trabajo consideraremos una especie que habita un determinado nicho ecológico[3] , sujeta a efecto Allee fuerte. Es decir, una disminución drástica de la población podría afectar su recuperación con el riesgo de una futura extinción en el lugar. Para revertir esta situación de efecto Allee, se propone un flujo migratorio de modo que sea posible la recuperación de la especie, y de esta forma superar el umbral de extinción.
En condiciones reales podría ocurrir que para lograr la preservación, se efectúe una reinserción mediante un flujo migratorio inducido,que será alto cuando el tamaño de la poblaciò sea bajo, mientras que este flujo migratorio será bajo cuando el tamaño de la población sea mayor.

También podría ocurrir una situación similar en ambientes naturales, en que el nicho de la población en estudio cuenta con pocos individuoses y una mayor disponibilidad de recursos, con lo que podría ser invadida por individuos de la misma especie para disputar tales recursos. Mientras que por el contrario, si el nicho se encuentra cercano a su capacidad de carga y existe una alta competencia por los recursos disponibles, la inmigración será menor

En ambas situaciones descritas, se establece un correlación negativa entre el tamño poblacional y la tasa de inmigración. Además agregaremos la condición natural, que una vez que la población haya alcanzado su capacidad de carga, el flujo migratorio cesará al no haber capacidad de soportar una población mayor. Estas condiciones nos permiten establecer la siguiente hipótesis:

Hypothesis 1 La tasa de migración es una función decreciente respecto al tamaño poblacional, que se anula cuando la población alcanza la capacidad de carga del medio.

El caso particular en que la relación entre capacidad de carga y tamaño poblacional es lineal, fue estudiando en *Population Dynamics with density-dependent immigrations and Allee effect*[13] y su resultado se resume en el siguiente teorema:

Teorema 1 *Para el modelo dado por*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} &=& rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right)\left(\dfrac{x}{m}-1\right)+h_0\left(1-\dfrac{x}{K}\right) \\ \\ x(0) &=& x_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

donde r representa la tasa intrínseca de reproducción de la especie y h_0 se denominará tasa de colonización*, con r, K, m, h_0 positivos, se cumple que,*

- *Si $h_0 > \frac{mr}{4}$, entonces $x = K$ será el único punto de equilibrio y es asintóticamente estable.*
- *Si $h_0 = \frac{mr}{4}$, entonces $x = \frac{m}{2}$ será un segundo punto de equilibrio, el cual es inestable.*
- *Si $h_0 < \frac{mr}{4}$, entonces existirán tres puntos de equilibrio positivos, x_1, x_2 y K. Donde x_1 es un punto de equilibrio asintóticamente estable denominado* equilibrio migratorio precario*. El punto de equilibrio x_2 es inestable y corresponde a un nuevo umbral Allee que considera la inmigración. La forma explícita de x_1 y x_2 está dada por $x_1 = \dfrac{m}{2} - \dfrac{\Delta}{2r}$ y $x_2 = \dfrac{m}{2} + \dfrac{\Delta}{2r}$, donde $\Delta = r^2 - \dfrac{4r}{m}h_0$. Estos puntos cumplen con la desigualdad $0 < x_1 < \frac{m}{2} < x_2 < m$.*

En este trabajo, en cambio, se estudiará un esquema general de función de inmigración y se mostrará que bajo condiciones muy poco restrictivas, el comportamiento cualitativo de la dinámica no variará respecto al caso lineal.

2. El Modelo

Se supondrá que la especie en estudio habita un determinado nicho ecológico, el que posee una capacidad de carga para la especie, de K individuos. Las condiciones del nicho y los hábitos de la especie determinan la existencia de una población crítica, bajo la cual no le es factible la subsistencia, es decir, se presenta un efecto Allee fuerte. Este tamaño crítico de subsistencia o umbral Allee será denotado por m.

Para un tamaño poblacional en un tiempo t denotado por $x(t)$, los modelos diferenciales clásicos de crecimiento poblacional, denotarán la rapidez de su variación por una ecuación de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t)\big)x(t)$$

y bajo las condiciones expuesta en el párrafo anterior, la tasa percápita de crecimiento $f(x)$, podrá ser descompuesta como

$$f(x) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)\left(\frac{x}{m} - 1\right), \qquad \text{con } x(0) = x_0 > 0 \text{ y } m < K \tag{2}$$

donde r es la tasa de reproducción intrínsica de la especie, m corresponde al umbral Allee y K es la capacidad de carga del medio.
Así el modelo diferencial se escribirá de la forma,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & r\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)\left(\dfrac{x}{m} - 1\right)x \\ & & \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Consideraremos además, que la rapidez en la variación poblacional se verá afectada por un flujo migratorio continuo, provocado por causas naturales o artificiales, bajo la hipótesis principal del trabajo, donde se establece que la tasa migratoria está inversamente correlacionada con el tamaño poblacional, anulándose cuando la especie haya saturado la capacidad de carga del medio que habita. En este contexto la tasa migratoria se expresará en la forma,

$$h(x) = \left(1 - \frac{x}{K}\right) l(x) \tag{4}$$

bajo el supuesto dado por la siguiente hipótesis:

Hypothesis 2 *$h(x)$ es una función positiva, diferenciable y decreciente $\forall x > 0$ con $h(0) = h_0 > 0$, $h(K) = 0$*

Donde $l(x)$, bajo las condiciones de la hipótesis (2), debe ser una función estrictamente positiva y continuamente extendible en el intervalo $[0, K]$ con $l(0) = h(0) = h_0$, por lo tanto $l(x)$ alcanza su máximo y minimo en el intervalo $[0, K]$. De esta manera,es posible definir,

$$\alpha = \text{mín}\{l(x);\ x \in [0, K]\} \quad \text{y} \quad \beta = \text{máx}\{l(x) :\ x \in [0, K]\} \tag{5}$$

Como la función migratoria $h(x)$ es decreciente en la variable x se debe verificar que,

$$h'(x) = -\frac{1}{K}l(x) + \left(1 - \frac{x}{K}\right) l'(x) < 0, \qquad \forall x \in [0, K]$$

Luego, la derivada de la función $l(x)$ deebe satisfacer la desigualdad,

$$l'(x) < \frac{l(x)}{K - x}$$

Las condiciones que debe cumplir $l(x)$, serán resumidas en la siguiente hipótesis:

Hypothesis 3 *La función $l(x)$ es positiva, contínuamente extendible y diferenciable en $[0, K]$ con,*

i) $l'(x) < \dfrac{l(x)}{K - x}$

ii) $l'(x) > -\sqrt{r^2 - \dfrac{4r}{m}\beta}$

Finalmente, considerando las condiciones dadas en las hipóteis (2) y (3), el crecimiento natural de la especie en su nicho y el flujo migratorio, el modelo matemático será escrito de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= xf(x) + h(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{6}$$

donde la funciones $f(x)$ y $h(x)$ están dandas por las ecuaciones (2) y (4)

3. Resultados Principales

Escribiendo en forma explícita el modelo dado en (6) se tiene,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)\left(\dfrac{x}{m} - 1\right) + \left(1 - \dfrac{x}{K}\right) l(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{7}$$

tal que $h(x)$ y $l(x)$ cumplen las condiciones de las hipótesis (2) y (3)

Definiendo $x_\alpha(t)$, $x(t)$ y $x_\beta(t)$ como las soluciones de las ecuaciones

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = xf(x) + \alpha\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad \frac{dx_\beta}{dt} = xf(x) + h(x) \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = xf(x) + \beta\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

con valor inicial en x_0 respectivamente, se sigue a partir de (5), que

$$\frac{dx_\alpha}{dt} \leq \frac{dx}{dt} \leq \frac{dx_\beta}{dt}$$

y luego,

$$x_\alpha(t) \leq x(t) \leq x_\beta(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{8}$$

Si consideramos ahora la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)\left(\frac{x}{m} - 1\right) + \left(1 - \frac{x}{K}\right) l(x) = \left(1 - \frac{x}{K}\right)\left[\frac{rx^2}{m} - rx + l(x)\right] = 0 \tag{9}$$

se sigue que para $l(x) = \alpha$ y $l(x) = \beta$ sus respectivos discriminantes quedan,

$$\Delta_\alpha = r^2 - \frac{4r}{m}\alpha \quad , \quad \Delta_\beta = r^2 - \frac{4r}{m}\beta$$

y como $\alpha < \beta$ entonces $\Delta_\beta < \Delta_\alpha$.

Luego se tiene los casos en que el discriminante es menor queco, igual a cero y mayor que cero. Estudiaremos el caso más interesante en que el discriminante es mayor que cero y enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 2 *Sea la tasa migratoria* $h(x) = \left(1 - \dfrac{x}{K}\right) l(x)$ *donde* $l(x)$ *satisface las condiciones de la hipótesis* (3). *Si* $\Delta_\beta = r^2 - \frac{4r}{m}\beta > 0$, *entonces para el modelo dado por la ecuación* (7), *existen solo tres punto de equilibrio.*

Demostración

Definamos las siguientes funciones auxiliares:

$$g_\alpha(x) = \frac{r}{m}x^2 - rx + \alpha, \quad g(x) = \frac{r}{m}x^2 - rx + l(x) \quad \text{y} \quad g_\beta(x) = \frac{r}{m}x^2 - rx + \beta \tag{10}$$

entonces se tiene que:

$$g_\alpha(x) \leq g(x) \leq g_\beta(x), \quad \forall x \in [0, K] \tag{11}$$

Sean $x_\alpha(t)$, $x(t)$, $x_\beta(t)$ respectivamente, las soluciones de las ecuaciones,

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \left(1 - \frac{x}{K}\right) g_\alpha(x) \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \left(1 - \frac{x}{K}\right) g(x) \quad , \quad \frac{dx_\beta}{dt} = \left(1 - \frac{x}{K}\right) g_\beta(x)$$

Por el Teorema 1 se tiene que, además de $x = K$, $x_\alpha(t)$ y $x_\beta(t)$ possen dos puntos de equilibrio positivos dados por,

$$x_{1\alpha} = \frac{m}{2} - \frac{m\sqrt{\Delta_\alpha}}{2r}, \qquad x_{2\alpha} = \frac{m}{2} + \frac{m\sqrt{\Delta_\alpha}}{2r} \tag{12}$$

$$x_{1\beta} = \frac{m}{2} - \frac{m\sqrt{\Delta_\beta}}{2r}, \qquad x_{2\beta} = \frac{m}{2} + \frac{m\sqrt{\Delta_\beta}}{2r} \tag{13}$$

Se deduce fácilmente que se satisface la desigualdad,

$$0 < x_{1\alpha} < x_{1\beta} < \frac{m}{2} < x_{2\beta} < x_{2\alpha} < m < K$$

Se demostrará ahora la existencia y unicidad de los puntos de equilibrio para el modelo dado en (7)

i) Existencia: Usando las expresiones definidas en las ecuaciones (12) y (13), las funciones auxiliares $g_\alpha(x)$ y $g_\beta(x)$ definidas en (10), se tiene,

$$g_\alpha(x) = \frac{r}{m}\left(x - x_{1\alpha}\right)\left(x - x_{2\alpha}\right) \quad , \quad g_\beta(x) = \frac{r}{m}\left(x - x_{1\beta}\right)\left(x - x_{2\beta}\right)$$

Luego, si $x \in]0, x_{1\alpha}[\cup]x_{2\alpha}, K[$ entonces $g_\alpha(x) > 0$ y por la desigualdad (11) se tiene que

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in]0, x_{1\alpha}[\cup]x_{2\alpha}, K[\tag{14}$$

AnÍogamente, si $x \in]x_{1\beta}, x_{2\beta}[$ entonces $g_\beta(x) < 0$ y por la desigualdad (11) se sigue que

$$g(x) < 0 \quad \forall x \in]x_{1\beta}, x_{2\beta}[\tag{15}$$

Luego, de (14) y (15), se tiene que $\frac{dx}{dt}$ no posee raíces en el intervalo $]0, x_{1\alpha}[\cup]x_{1\beta}, x_{2\beta}[\cup]x_{2\alpha}, K[$

Por otro lado, considerando (11), se tiene que $g(x_{1\alpha}) > g_\alpha(x_{1\alpha}) = 0$ y $g(x_{1\beta}) < g_\beta(x_{1\beta}) = 0$ y usando el Teorema del Valor Intermedio, se deduce que existe $x_1 \in]x_{1\alpha}, x_{1\beta}[$, tal que $g(x_1) = 0$.

Análogamente, $g(x_{2\beta}) < g_\beta(x_{2\beta}) = 0$ y $g(x_{2\alpha}) > g_\alpha(x_{2\alpha}) = 0$ por lo tanto existe $x_2 \in]x_{2\beta}, x_{2\alpha}[$, tal que $g(x_2) = 0$.

Por lo tanto, la dinámica del modelo (7) tiene, al menos, tres puntos de equilibrio: x_1, x_2, K.

ii) Unicidad: Para demostrar que la dinámica del modelo (7) no tiene otros puntos de equilibrio distintos de x_1, x_2 y K, será sufuciente demostrar la monotonia de $\frac{dx}{dt}$ respecto a x, en los intervalos $]x_{1\alpha}, x_{1\beta}[$ y $]x_{2\beta}, x_{2\alpha}[$.

Como $\frac{dx}{dt} = xf(x) + h(x)$ y $x \in \,]x_{1\alpha}, x_{1\beta}[$, entonces es fácil ver que el crecimiento natural de la especie, representado por el término $xf(x)$, que es un polinomio de tercer grado con raíces en $0, m$ y K, posee derivada negativa en el intervalo $]0, \frac{m}{2}]$ que incluye al intervalo $]x_{1\alpha}, x_{1\beta}[$, por lo que sólo queda analizar la derivada de tasa migratoria $h(x) = \left(1 - \dfrac{x}{K}\right) l(x)$. Utilizando la hipótesis 3*ii)* se obtiene:

$$h'(x) = -\frac{l(x)}{K} + \left(1 - \frac{x}{K}\right) l'(x) < -\frac{l(x)}{K} + \left(1 - \frac{x}{K}\right) \frac{l(x)}{K - x} < 0$$

Luego, la función $\frac{dx}{dt}$ es monótona decreciente en $]x_{1\alpha}, x_{1\beta}[$, por lo que x_1 es la única raiz en este intervalo.

Para el intervalo $]x_{2\beta}, x_{2\alpha}[$, considerando que $x > x_{2\beta}$, la hipótesis 3*ii)* y que la expresión para $g(x)$ viene dada por $g(x) = \frac{r}{m}x^2 - rx + l'(x)$, se tiene,

$$g'(x) = \frac{2r}{m}x - r + l'(x) > \frac{2r}{m}x_{2\beta} - r + l'(x) > \sqrt{\Delta_\beta} + l'(x) > 0$$

Es decir, $g(x)$ es monótona en el intervalo $]x_{2\beta}, x_{2\alpha}[$ y por lo tanto no tiene más raíces en el intervalo $]x_{2\beta}, x_{2\alpha}[$
Así, el teorema queda demostrado

4. Conclusión

El resultado anterior se resume como: Bajo las condiciones descritas en las hipótesis 2 y 3, la dinámica del modelo descrito en (7) es cualitativamente idéntica a la descrita en el modelo de la ecuación (1).

Referencias

[1] Capasso, V.; Bakstein, D. *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes* (Second Edition). Birkhäuser. Springer Science+Business Media, LLC, (2012). xiii+434 pp.

[2] Iacus, S. M., *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations* Springer Science+Business Media, LLC, (2008). xviii+284 pp.

[3] R. H. Whittaker S. A. Levin and R. B. Root *The American Naturalist* Vol. 107, No. 955 (May - Jun., 1973), pp. 321-338

[4] B. Dennis. *Allee effects: population growth, critical density, and chance of extinction.* Nat. Resour. Model., 3 (1989), 381-538.

[5] E. Liz, A. Ruiz-Herrera, *Delayed population models with Allee effects and exploitation*, Math. Biosci. Eng. 12 (2015), in press.

[6] P. Amarasekari. *Allee effect in metapopuilation dinamycs.* A.M. Nat., 152 (1998) , 298-302

[7] F.Courchamp, B. Grenfell and t.h. Cluton-Brock.*Population dynamics of obligate cooperators.* Proc. R. Soc. London Ser. B, 266(1999),557-564

[8] Brauer, F. and Castillo ChÃ¡vez, C.[2001], *Mathematical Models in Population Biology and epidemology.* Texts in Applied mathematics. Springer-Verlag.

[9] C. Greems and C.J. Stamps. *Habitat selection at low populations densities.* Ecology, 82 (2001), 2091-2100

[10] S. Shreiber. *Allee effects, extinction, and chaotic transients in simple population models.* Ther. Popul. Biol., 64(2003), 201-209

[11] C.M. taylor and A. Hastings. *Allee effects in biological invasions.* Ecol. lett., 8 (2005), 895-908

[12] H. Wells, H.G. Strauss, M.A. Rutter and P.H. Wells. *Mate location, population growth and species extinction.* Biol. Conserv., 86 (1998), 317-324

[13] Ossandón, G. A., Castro Santis, R.*Population Dynamics with Density - Dependent Immigrations and Allee effect.*Revista Colombiana de Matemáticas, 52(2), 211-218.